

华罗庚经济优化新理论与实证

陈木法

(江苏师范大学 北京师范大学)

运筹千里纵横论坛 第九十八期

2025 年 3 月 1 日

提纲

- 前言
- 华氏经济模型: 稳定性
- 关键变换(特殊情形). 产品序与分类
- 关键变换(一般情形)
- 带消费的一般情形 (华老的旧方案)
- 带消费的一般情形 (华老的新方案)
- 华老新方案的修正与更新. 新模型
- 马氏链、对偶链及其不变量
- 产品调控与经济结构的优化
- 经济结构的优化

2021 年元月13 日, 本论坛第四十二期, 作了题为“从华罗庚经济最优化模型谈起”的报告, 介绍了自 1988 年开始研究此专题的心得. 也是在 2021 年的夏天, 第一次见到华老完成于 1985⁺³⁶ 年(他于当年仙逝)、出版于 1987 年的研究专著《计划经济大范围最优化数学理论》, 中国财政经济出版社. 此书对于他先前(1982–85)的模型做了重大调整. 由此出发, 唤醒、修正、更新、再发展, 形成了新理论. 可以说, 原理论已换代. 鉴于经济理论的重要性, 有必要在此论坛上略作介绍. 华老仙逝前 53 天的小结: “一论双法”. “一论”落空. 同盟中央宣传部编《华罗庚诗文选》1986. 华 28 年; 陈 37 年.

1 华罗庚经济模型: 稳定性

所关心的产品所构成的**产综**: [固定单位: 甬, 吨...]

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}).$$

考察当前经济的三种数据

- 去年的投入:

$$x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(d)}).$$

- 今年的产出: $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)})$.

- 结构方阵 (或消耗系数方阵): $A_0 = (a_{ij}^{(0)})$.

每生产一个单位的 i 类产品, 需消耗 $a_{ij}^{(0)}$ 个单位的 j 类产品.

投入产出法

$$x_0^{(j)} = \sum_{i=1}^d x_1^{(i)} a_{ij}^{(0)}, \quad x_0 = x_1 A_0.$$

假定所生产的东西全部用于再生产(理想化模型).
则有 $x_{n-1} = x_n A_{n-1}$, $n \geq 1$. 从而

$$x_0 = x_1 A_0 = x_2 A_1 A_0 = x_n A_{n-1} \cdots A_0.$$

时齐情形 $A_n \equiv A$. $x_0 = x_n A^n$.

投入产出法: $x_n = x_0 A^{-n}$, $n \geq 1$.

联合国 1966 年. 据 2000 统计, ≥ 80 国家每 4~5 年编制一份表. 我国自 1987 年起每 5 年编制 1 份国家、省级表.

要求 A 不可约, 非流行的投入产出法

华罗庚基本定理. 正特征向量法

理想化模型:

- 最好的投入 $x_0 = A$ 的**最大左特征向量**.
此时有最佳发展速度 $\rho(A)^{-1}$.
- 否则, 只要 $A^{-1} \not\geq 0$, 就必然走向失衡, 即**失衡时**

$$T := \inf\{n : x_n \text{ 的某个分量} \leq 0\} < \infty.$$

华的前所未有的贡献是第二条.

Perron-Frobenius 定理: 非负不可约方阵的最大特征值为正的、单的, 最大左、右特征向量 u, v 为正[且唯一(不计常数因子)].

A 的三大特征 $(\rho(A), u, v)$. 固定!

例 (男耕女织的古代经济). 两产品: 农业、制造业

$$A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$u = \left(\frac{5}{7} (\sqrt{2400} + 13), 20 \right), 44.34397483.$$

则有

x_0	T^{x_0}
$(44, 20)$	3
$(44.344, 20)$	8
$(44.34397483, 20)$	13

使用 A 的稳定性测试

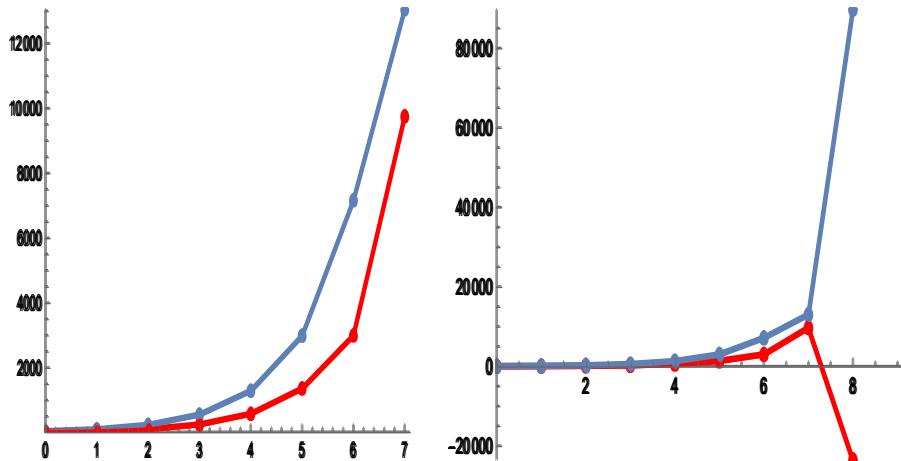


图 1 初值 $(44.344, 20)$, $T = 8$.

使用 A 的稳定性测试

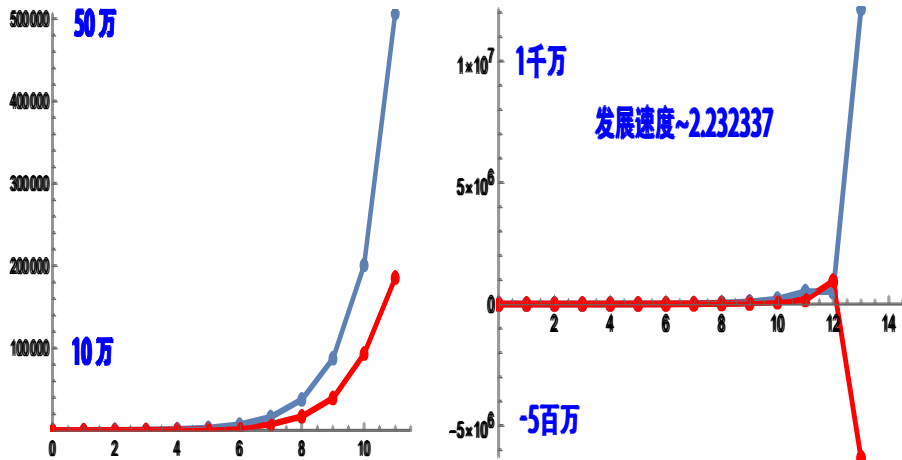


图 2 初值 $(44.34397483, 20)$, $T = 13$.

变换 $A \rightarrow P$, 使用 P 的稳定性测试

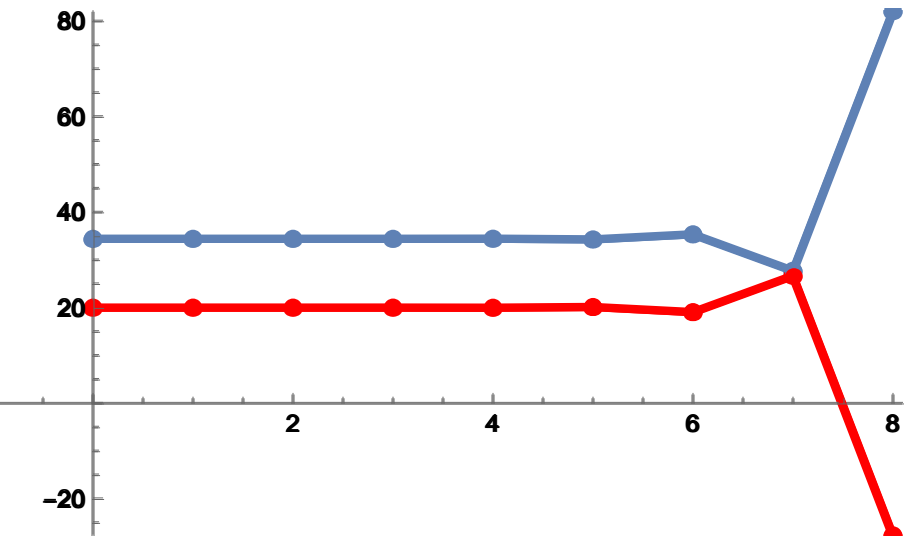


图 3 初值 $(34.41181135, 20)$, $T = 8$.

变换 $A \rightarrow P$, 使用 P 的稳定性测试

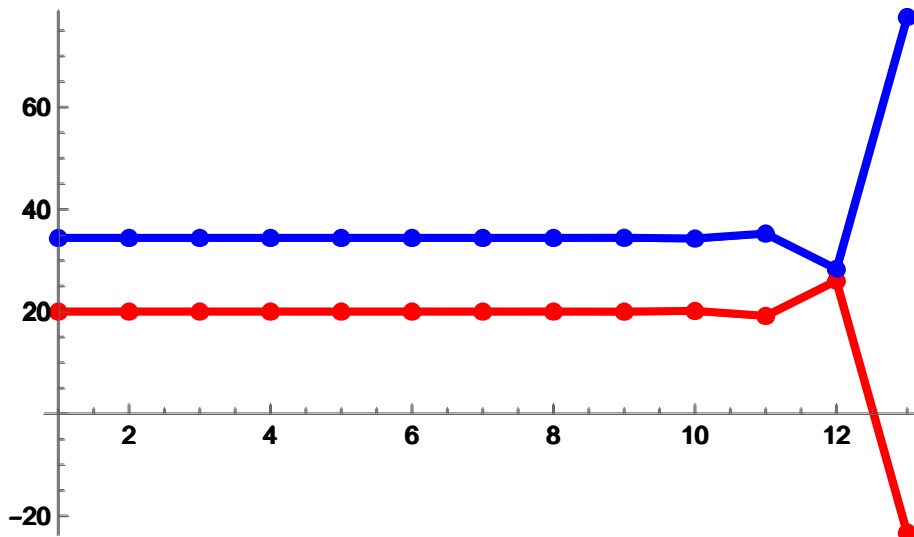


图 4 初值 $(34.41179182, 20)$, $T = 13$.

华罗庚基本定理的证明提要 [陈 1989/9]

$A = P: 0 \leq P, P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, 右 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ $P^n = (p_{ij}^{(n)})$,
此处 $\mathbf{1}$ 为分量均为 1 的列向量. 由遍历定理:

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi^{(j)} \quad \forall i, \quad \pi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \dots, \pi^{(d)})$$

$$P^n \rightarrow \mathbf{1}\pi \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad 0 \leq \pi, \quad \pi\mathbf{1} = 1.$$

π 为 P 的平稳分布(唯一稳定解!): $\pi = \pi P$.

对于 A , 最大左、右特征向量对称, 为何选左?

对于 P , 最大左、右特征向量分别为 π 和 $\mathbf{1}$, 自然选左!

华罗庚基本定理的证明提要 [陈 1989/9]

只需证 $x_n > 0 \ \forall n \Rightarrow x_0 = \pi$. 设 $x_0 > 0$ 且 $x_0 \mathbf{1} = 1$.

$$\text{则} \quad 1 = \mathbf{x}_0 \mathbf{1} = \mathbf{x}_n \mathbf{P}^n \mathbf{1} = x_n \mathbf{1}, \quad n \geq 1.$$

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \& \bar{x}: \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x}, \bar{x} \geq 0, \bar{x} \mathbf{1} = 1.$$

$$x_0 = (\mathbf{x}_0 \mathbf{P}^{-n_k}) \mathbf{P}^{n_k} = \mathbf{x}_{n_k} \mathbf{P}^{n_k} \rightarrow \bar{x} \mathbf{1} \pi = \pi. \quad \square$$

关键变换(特殊情形). $D_w, u \odot v$ 分量积

$$A_w = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0 \quad \boxed{x D_y, D_x y = x \odot y.}$$

定理 (陈 1989/1992, 2022)

- A_w 成为转移概率 P 当且仅当 $w = v$.
- P 的左特征向量为 $\mu := u \odot v$, 归一化为 $\pi := u \odot v / (uv)$. 平稳分布 $\pi = \pi P = \pi P^n$.

证明 不妨设 $\rho(A) = 1$. 那么 1: 分量恒为 1 的列向量

$$A_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A D_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A w \stackrel{?}{=} \mathbb{1}$$

第一项断言成立当且仅当 $A w = D_w \mathbb{1} = w$ 

2. 关键变换(特殊情形). 产品序与分类

$$P = D_v^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_v.$$

往证第二项断言: $\mu P = \mu$. 无妨设 $\rho(A) = 1$. 则

$$\begin{aligned}\mu P &= u \odot v D_{v^{-1}} A D_v = u \odot v \odot v^{-1} A D_v \\ &= u A D_v = u D_v = u \odot v = \mu. \quad \square\end{aligned}$$

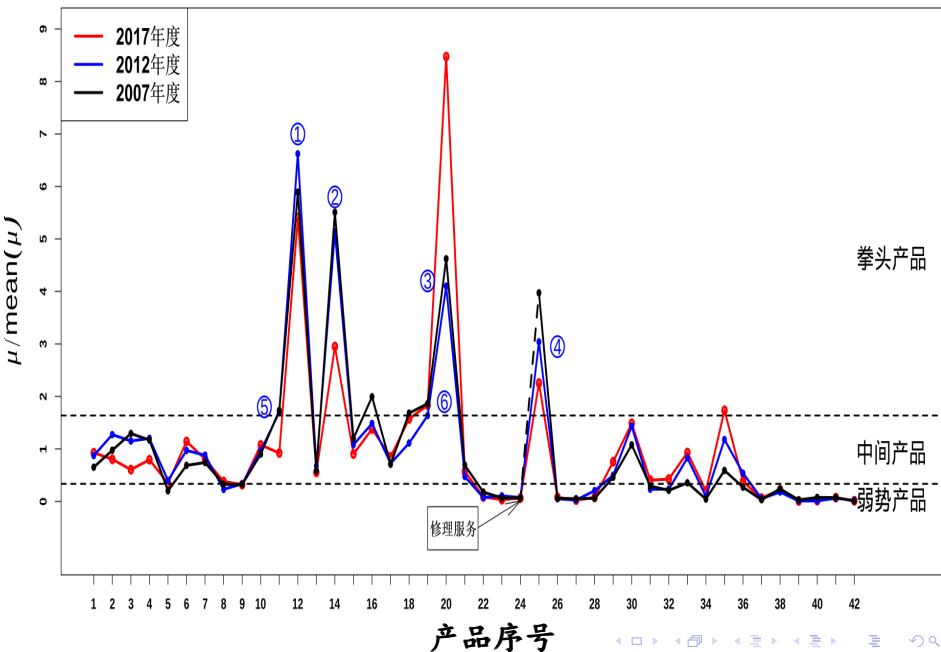
A 的三大特征 $(\rho(A), u, v)$

P 的三大特征 $(1, u \odot v, \mathbb{1})$.

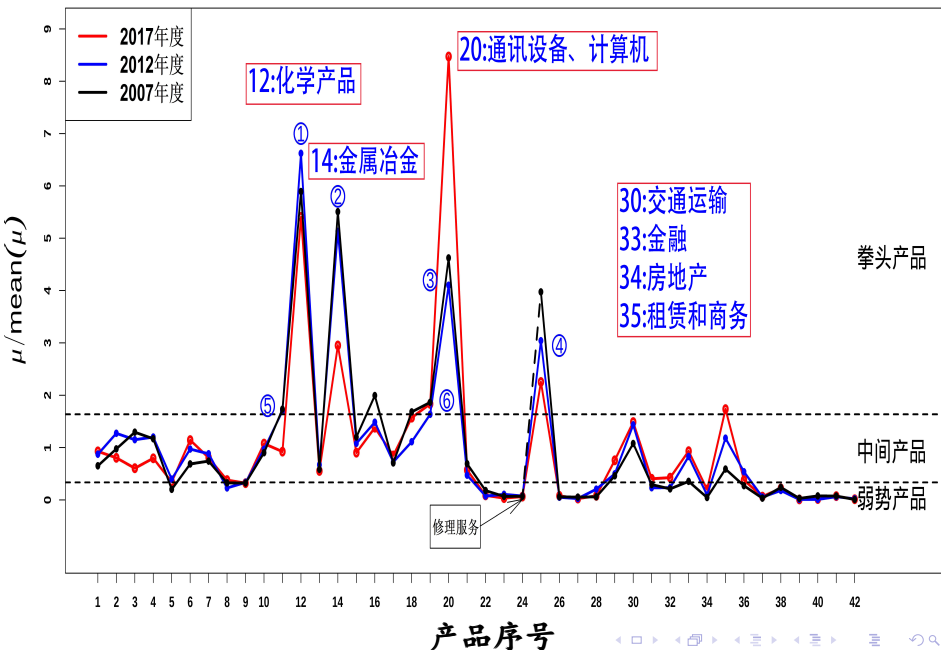
$u \odot v$ 有统一量纲(真实价值而非价格).

π 无量纲. 使用 π 排产品等级序并作产品分类

2017、2012 年度 42 个产品和 2007 年度 41 个产品的 μ 图



2017、2012 年度 42 个产品和 2007 年度 41 个产品的 μ 图



使用 π 对产品分类

前面已使用 μ 对产品排序, 这当然这与使用 π 是等效的. 此处说明: 使用 π 有助于产品分区.

$\pi = (\pi_k)$ 为 P 的唯一平稳分布 $\pi = \pi P^n, n \geq 1$.

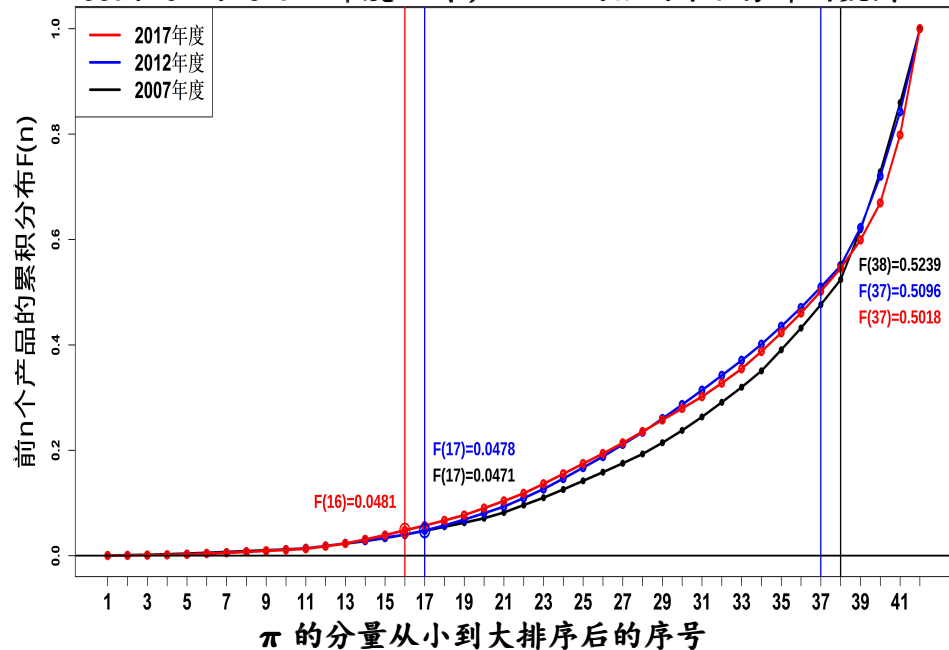
对每一 k , π_k 刻画了第 k 个产品对经济系统 A 稳定性的贡献. 将 π 的分量由小到大重排为

$p_1, p_2, \dots, p_{42}$. 由此得出 $F(n)$: 前 n 个的累积(概率)分布函数[注意三条曲线很接近]:

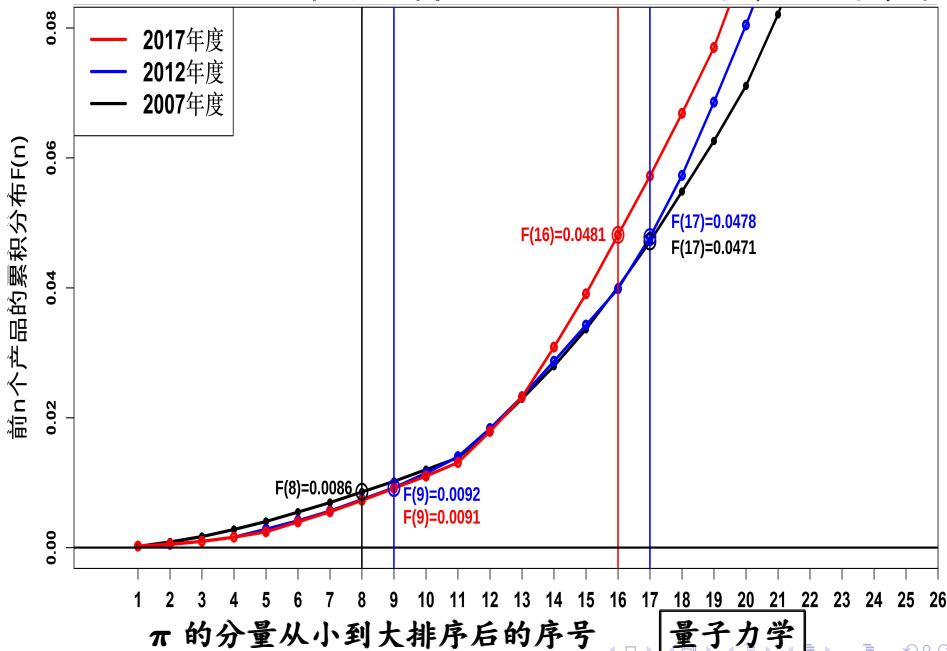
$$F(0) = 0, F(n) = \sum_{j=1}^n p_j, F(42) = 1.$$

自然, 随后图的左下方 ≤ 0.05 或更小些的产品可视为弱势者; 而右上方的 6 个产品为拳头产品. 余者为中间产品. 如同前两表一样, 2007 年所缺的 24 号产品需使用某种插补.

2007、2012、2017三年度42个产品 P 的 π 的累积分布函数图



2007、2012、2017 三年度 42 个产品 P 的 π 的累积分布函数局部图



3. 关键变换(一般情形): 任意正的 w, D_w

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n = D_w^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w, \quad n \geq 1.$$

$$A \rightarrow A_\alpha, \quad \alpha < 1. \quad (\text{等待新模型})$$

$$\frac{\tilde{A}_\alpha}{\rho(\tilde{A}_\alpha)} = D_w^{-1} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_w, \quad w > 0.$$

3. 关键变换(一般情形)

转换定理/等效原理.

固定 $\alpha < 1$

任意给定正向量 w , 定义 $\tilde{A}_\alpha$ 如上. 那么关于 $\tilde{A}_\alpha$ 的迭代解 $\{\tilde{x}_n\}_{n \geq 0}$: $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}_\alpha^n$ 与关于 A_α 的迭代解 $\{x_n\}_{n \geq 0}$: $x_0 = x_n A_\alpha^n$ 可通过恒等式

$$\rho(\tilde{A}_\alpha)^n \tilde{x}_n = \rho(A_\alpha)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

相互转换. 特别地, 对于每一个 n 和 k , $\tilde{x}_n$ 的第 k 个分量为非正(相应地, 负)当且仅当 x_n 如此.

相同稳定性: 失衡/崩溃的时间和产品都相同.

证明 略去下标 α 不写. 设 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $x_0 = x_n A^n, n \geq 0$. 则两边右乘 D_w 得出

$$\begin{aligned}
 x_0 D_w &= x_n A^n D_w \quad \boxed{\text{目标是求 } \{\tilde{x}_n\} \text{ 满足 } \tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n} \\
 &= \left(\rho(A)^n x_n D_w \right) D_w^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w \\
 &= \left(\rho(A)^n x_n D_w \right) \left(\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n \\
 &= \left[\left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n D_w \right] \tilde{A}^n, \quad n \geq 0. \\
 \implies \tilde{x}_0 &= \tilde{x}_n \tilde{A}^n \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

由于

$$x_n D_w = x_n \odot w,$$

这表明

$$\tilde{x}_n := \left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0$$

是迭代方程 $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n$ 的解. 得出等价表示:

$$\rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

最后, 因为 $\rho(A)$, $\rho(\tilde{A})$ 和 w 均为正, 定理末项断言显然. 反向思维. $A \rightarrow A_\alpha, \alpha \in (0, 1)$ 也对. $\square$

将上述定理应用于关键变换 $A \rightarrow P$, 留心 $\rho(P) = 1$, 我们得出如下结果.

推论.

关于 P 的迭代解 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$: $\mu_0 = \mu_n P^n$ 与关于 A 的迭代解 $\{x_n\}_{n \geq 0}$: $x_0 = x_n A^n$ 可通过恒等式

$$\mu_n = \rho(A)^n x_n \odot v, \quad n \geq 0$$

相互转换. 特别地, 对于每一个 n 和 k , μ_n 的第 k 个分量为非正(相应地, 负)当且仅当 x_n 如此.

4 带消费的一般情形 (华老的旧方案)

消耗系数方阵: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$, 非负、不可约、可逆. x : 所关心的产品构成的产综

- 无消费理想模型. 第 n 步产出

$$x_n = x_0 A^{-n}, \quad n \geq 1. \quad x_0: \text{投入.}$$

- 带消费实用模型. 消费比例 $\alpha \in (0, 1)$.

$$x_n = x_0 B^n, \quad n \geq 1, \quad \boxed{B \text{ 无三大特征!}}$$

$$B = (1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I. \quad \boxed{B \text{ 非非负!}}$$

$$\text{速度 } \rho(B) = \frac{1}{\rho(A)} + \alpha \left(1 - \frac{1}{\rho(A)} \right) \leq \frac{1}{\rho(A)}. \quad \boxed{\text{如 } \rho(A) < 1}$$

5 带消费的一般情形 (华老的新方案)

- (旧)带消费实用模型. 消费比例 $\alpha \in (0, 1)$.

$$x_n = x_0 B^n, \quad n \geq 1, \quad \boxed{B \text{ 无三大特征!}}$$

$$B = (1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I. \quad \boxed{B \text{ 非非负!}}$$

- 新模型. 设 $\gamma \in (0, 1)$, 称为消费比例. 命

$$x_n = x_{n+1}A + \gamma(x_{n+1} - x_n), \quad n \geq 0,$$

$$x_n = x_{n+1}A_\gamma, \quad A_\gamma = \frac{A + \gamma I}{1 + \gamma}, \quad \text{非负不可分约}$$

$$\rho(A_\gamma) = (\rho(A) + \gamma)/(1 + \gamma).$$

6. 华老新方案的修正与更新. 新模型

通常 $\rho(A) < 1$, 华新模型的增长速度为

$$\delta := \frac{1}{\rho(A_\gamma)} - 1 = \frac{1 - \rho(A)}{\rho(A) + \gamma} \downarrow \frac{1 - \rho(A)}{1 + \rho(A)} > 0, \quad \text{当 } \gamma \uparrow 1.$$

当 $\rho(A) = 2/3$ 时, 右方极限为 $3/5$, 最小增速 60%

当且仅当 $\gamma \uparrow \infty$ 时, 右方的极限才为零. 作修正

$\gamma \rightarrow$ 消费倍数 $\gamma_\alpha = \alpha / (1 - \alpha)$, 消费参数 $\alpha \in (0, 1)$.

新模型: $x_n = x_{n+1} A_\alpha$, $A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I$.

$$\rho(A_\alpha) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha.$$

不变量 u 和 v

$\{A_\alpha : \alpha \in (0, 1)\}$ 有共同的左右特征向量 u, v .

$\gamma_\alpha \leq 1 \iff \delta \geq (1 - \rho(A)) / (1 + \rho(A))$. 实用 $\gamma_\alpha > 1$

7. 马氏链、对偶链及其不变量

回顾关于矩阵 A 的关键变换

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0. \quad (*)$$

$\tilde{A}$ 为转移概率矩阵 P (自然有 $\rho(\tilde{A}) = 1$) 当且仅当 w 为 A 的最大右特征向量 v . 我们也常直接称 P 为马氏链. 相应于 P 的三大特征(最大特征值及其左、右特征向量)为 $(1, u \odot v, \mathbb{1})$.

将上述结果应用于 A 的转置 A^* (其右特征向量为 u^*), 则由变换 $(*)$

$$D_w^{-1} \frac{A^*}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0$$

马氏链、对偶链及其不变量

得出另一转移概率矩阵当且仅当 $w = u^*$. 后者的三大特征为 $(1, u^* \odot v^*, \mathbb{1})$ (当然, $u^* \odot v^* = u \odot v$). 为去掉上式中的 $*$, 只需作转置, 得出

$$Q_w := D_w \frac{A}{\rho(A)} D_w^{-1}.$$

此时, Q_w 的列和恒为 1 当且仅当 $w = u$. 称 Q_u 为对偶转移概率矩阵或对偶马氏链(简称对偶链). 其三大特征成为 $(1, \mathbb{1}^*, u \odot v)$.

在研究经济结构矩阵的不变量之前, 先复习一下最简单的不变量: 圆周率 π , 它略去了描述圆的大小的基本参数——半径 r , 得到

$$\pi = \text{圆的周长} / (2r) = \text{圆的面积} / r^2.$$

马氏链、对偶链及其不变量

前面已讲过, 对于我们的带消费模型 $\{A_\alpha: \alpha \in [0, 1]\}$, 略去刻画发展速度的谱半径 $\rho(A_\alpha)$, 此方阵族拥有两个不变量: 即三大特征中有两个 u, v 成为不变量(是向量, 但与 α 无关).

现在给定 P , 考虑变换 $(*)$ 的逆变换, 对于正的 w , 可定义关于 P 的逆变换

$$A_w := D_w P D_w^{-1}$$

作为 P 的相似变换, 我们有 $\rho(A_w) = 1$. 由此易证 w 为 A_w 的最大右特征向量. 因此, 依照变换 $(*)$, 由 A_w 所导出的转移概率方阵就是 P . 这说明 P 是方阵族

$$\mathcal{A}_P := \{A_w = D_w P D_w^{-1} : w > 0\}$$

共有的不变量 (不变方阵, 是方阵而不再是向量).

8. 产品调控与经济结构的优化

回忆我们对经济模型已做过两次优化：一是以最快发展速度为目标，另一是从永不崩溃为目标。华氏基本定理告诉我们：两者的唯一最优解都是 A 的最大左特征向量 u 。这提示我们选择新的产综 $\tilde{u}$ 作为产品调控的目标。构造以 $\tilde{u}$ 为其最大左特征向量的新结构方阵 $\tilde{A}$ 。事实上，问题远比这些复杂得多。例如我们考虑含 100 个产品的系统，则需确定新方阵的 10^4 个元素，但给定的新平衡解仅有 100 个数据，剩下的 9900 个数据到哪里去找？为填补新矩阵 $\tilde{A}$ 欠缺的信息，我们可以要求新的消费矩阵 $\tilde{A}$ 尽可能地接近于原来的消费矩阵 A ，否则在实践中未必可行。

经济结构的优化

我们手上仅有 A 及其 u 和目标平衡解 $\tilde{u}$. 但我们有完全确定的对偶链

$$Q_u := D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1}.$$

它与 $A/\rho(A)$ 是 1-1 对应的:

$$\frac{\textcolor{red}{A}}{\textcolor{red}{\rho(A)}} = D_u^{-1} \textcolor{red}{Q_u} D_u.$$

将 A 换成待求的 $\tilde{A}$, 我们同样可以形式上写出与上述的两个方程完全平行的方程:

$$Q_{\tilde{u}} := D_{\tilde{u}} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} D_{\tilde{u}}^{-1}, \quad \frac{\textcolor{red}{\tilde{A}}}{\textcolor{red}{\rho(\tilde{A})}} = D_{\tilde{u}}^{-1} \textcolor{red}{Q_{\tilde{u}}} D_{\tilde{u}}.$$

9. 经济结构的优化

为使 $\tilde{A}$ 尽可能地接近于 A , 理应要求两者的不变量尽可能接近. **最简单取法是: $Q_{\tilde{u}} = Q_u$.** 从 $Q_{\tilde{u}}$ 和 Q_u 出发, 按照前面的方法, 可定义两个分别以 $Q_{\tilde{u}}$ 和 Q_u 为不变量的方阵族

$$\mathcal{A}_{Q_u} = \left\{ A : \frac{A}{\rho(A)} = D_w Q_u D_w^{-1}, w > 0 \right\},$$

$$\mathcal{A}_{Q_{\tilde{u}}} = \left\{ \tilde{A} : \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w Q_{\tilde{u}} D_w^{-1}, w > 0 \right\}.$$

当 $Q_{\tilde{u}} = Q_u$ 时, $\mathcal{A}_{Q_{\tilde{u}}} = \mathcal{A}_{Q_u}$. 详言之, 此时我们可从上述方程组解出仅有的未知量 $\tilde{A}/\rho(\tilde{A})$;

经济结构的优化解

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} &= D_{\tilde{u}}^{-1} Q_{\tilde{u}} D_{\tilde{u}} \quad (\text{先在 } \mathcal{A}_{Q_{\tilde{u}}} \text{ 中取 } w = \tilde{u}) \\
 &= D_{\tilde{u}}^{-1} Q_u D_{\tilde{u}} \quad (\text{命 } Q_{\tilde{u}} = \text{已知的 } Q_u) \\
 &= D_{\tilde{u}}^{-1} D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1} D_{\tilde{u}} \quad (\text{置换 } Q_u \text{ 的显式表示}) \\
 &= D_{\tilde{u}^{-1} \odot u} \frac{A}{\rho(A)} D_{u^{-1} \odot \tilde{u}} \quad (\text{化简已是显式的右方}) \\
 &= D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}, \text{ 可推广到 } \{A_\alpha, \alpha \in [0, 1]\}
 \end{aligned}$$

因 $w = \tilde{u} \odot u^{-1} > 0$, 由等效原理, $\tilde{A} \sim$ (等效于) A , $A \sim P \Rightarrow \tilde{A} \sim P$.

计划经济大范围最优化 数学理论（新版）



华罗庚 著

陈木法 石昊坤 编

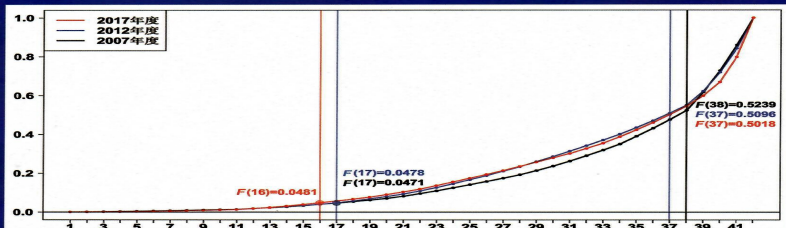


北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

华罗庚经济优化新理论与实证

*New Theory of Loo-Keng Hua's Economic Optimization
and Demonstrational Examples*

陈木法 谢颖超 陈彬 周勤 杨婷 © 著



北京师范大学出版集团
北京师范大学出版社

<http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf>

<http://rims.jsnu.edu.cn/f7/48/c16902a390984/page.htm>

谢谢大家!

38