

最优搜索问题

—从马航失联谈起

陈木法

(北京师范大学)

四川大学数学学院

2016年11月15日

从马航失联谈起

- 2014 年 3 月 8 日凌晨 1 时 20 分，
马来西亚航空公司航班 MH 370 失
联，乘客 239 人/中国 154 名
- 至今搜索失败，原因？

从马航失联谈起

- 2014 年 3 月 8 日凌晨 1 时 20 分，马来西亚航空公司航班 MH 370 失联，乘客 239 人/中国 154 名
- 至今搜索失败，原因？
- 潜水艇，宏观经济，烹调
- 寻求最佳方案

做数学案例

- 何为创新？何为好数学？
- 如何选方向/选题？
- 如何步步深入？

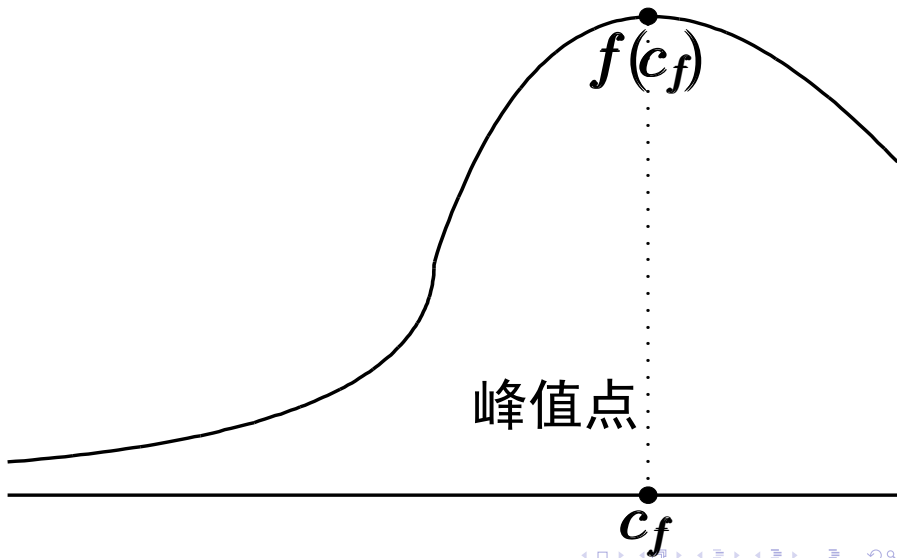
做数学案例

- 何为创新？何为好数学？
- 如何选方向/选题？
- 如何步步深入？

直接搜索，无需表达式，“瞎子爬山法”

通过实验找表达式，百次如何？
有表达式如何？大多算法并非高效。

求最大值问题. 单峰函数



序贯求优. 特殊情形：对分法

每一步试点取为上一步剩余区

间 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$

的中点

$$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$f(x_1)$

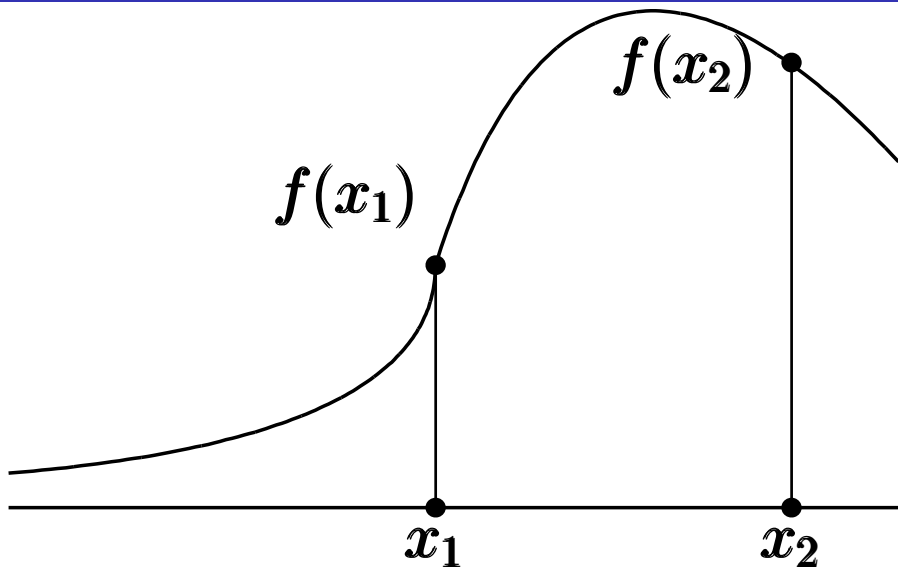
$f(c_f)$

峰值点

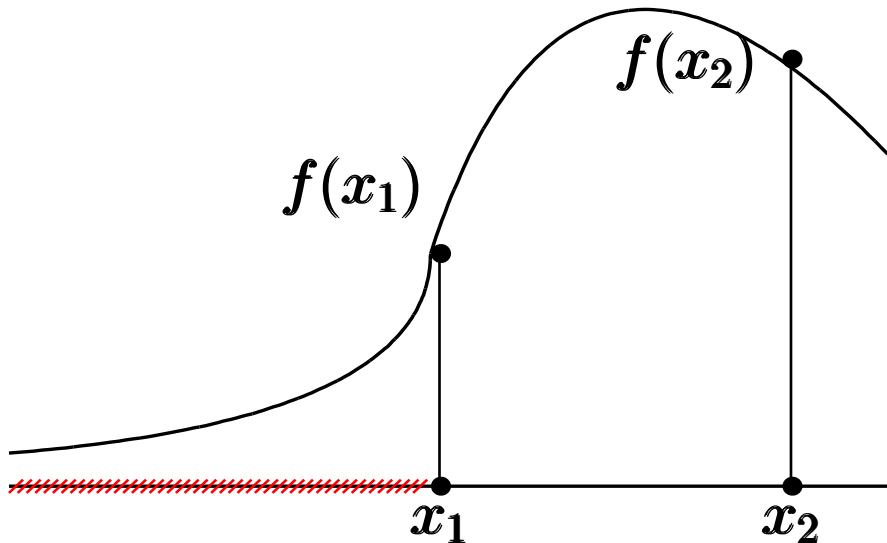
x_1

c_f

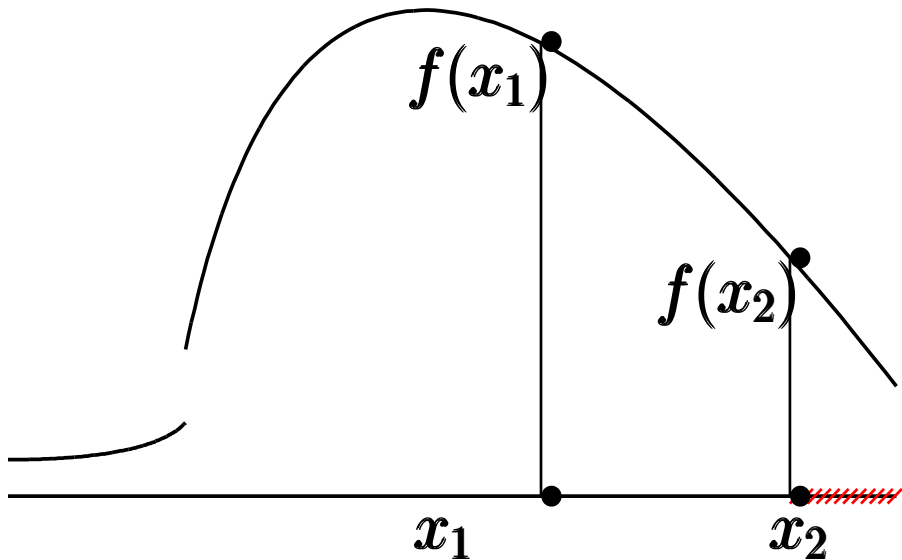
序贯求优. 一般情形, 需两个试点



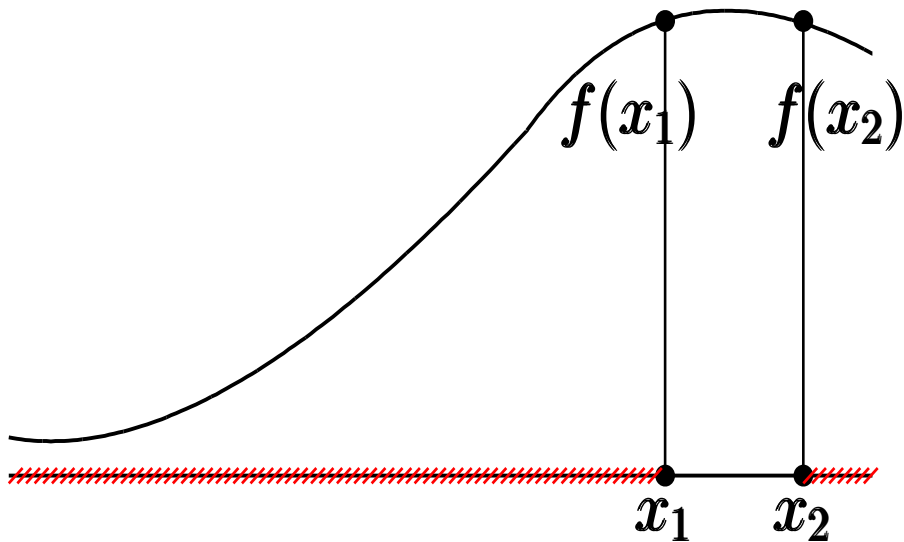
序贯求优. 一般情形, 需两个试点



序贯求优. 一般情形, 需两个试点



序贯求优. 一般情形, 需两个试点



试验策略

$\mathcal{F}$: $[0, 1]$ 上单峰函数的全体

定义

试验策略 $\mathcal{P}$: 第 1 个试验点 $x_1(\mathcal{P})$ 与 $f \in \mathcal{F}$ 无关; 第 n ($n \geq 2$) 个试验点 x_n 由策略 $\mathcal{P}$, 前 $n - 1$ 个试验点及其试验结果决定:

$$x_n = x_n(\mathcal{P}; x_1, \dots, x_{n-1}; f(x_1), \dots, f(x_{n-1})).$$

试验策略：分数法 $\mathcal{F}_n$

Fibonacci 数列： $F_0 = F_1 = 1$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

试验策略：分数法 $\mathcal{F}_n$

Fibonacci 数列： $F_0 = F_1 = 1$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

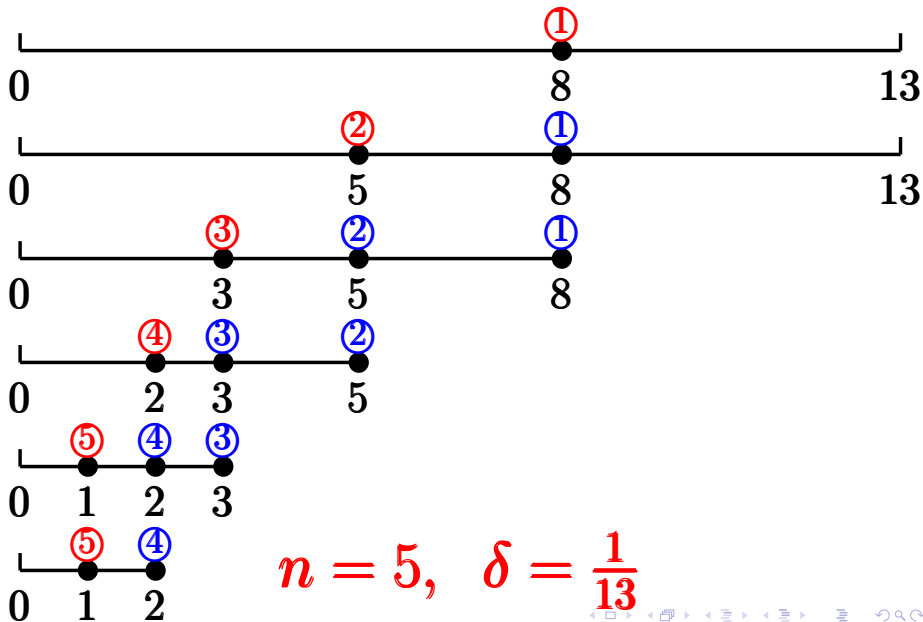
固定 $n \geq 1$. 分数法 $\mathcal{F}_n$:

$$x_1(\mathcal{F}_n) = F_n / F_{n+1},$$

$$x_2(\mathcal{F}_n) = 1 - F_n / F_{n+1} = F_{n-1} / F_{n+1}$$

第 n ($n \geq 3$) 个试验点 x_n 是第 $n-1$ 次试验留下的好点关于中点的对称点.

$$F_1 = 1, F_2 = 2, 3, 5, 8, F_6 = 13$$



n 步(试验)精度

峰值点 c_f : f 在 c_f 处最大
策略 $\mathcal{P}$ 的 n 步最大值点

$$c_f(\mathcal{P}, n) \in \{x_1, \dots, x_n\}:$$

$$f(c_f(\mathcal{P}, n))$$

$$= \max\{f(x_i) : i = 1, \dots, n\}.$$

策略 $\mathcal{P}$ 的 n 步精度: **极大极小化原理**

$$\delta(\mathcal{P}, n) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |c_f(\mathcal{P}, n) - c_f|$$

定理 (Jack Carl Kiefer, 1953 [4 页+4 行])

分数法 $\mathcal{F}_n$ 是 n 步最优策略:

$$\delta(\mathcal{F}_n, n) = \inf_{\mathcal{P}} \delta(\mathcal{P}, n)$$

$$= \inf_{\mathcal{P}} \sup_{f \in \mathcal{F}} |c_f(\mathcal{P}, n) - c_f|$$

$$= \frac{1}{F_{n+1}}.$$

定理 (Jack Carl Kiefer, 1953 [4 页+4 行])

分数法 $\mathcal{F}_n$ 是 n 步最优策略:

$$\delta(\mathcal{F}_n, n) = \inf_{\mathcal{P}} \delta(\mathcal{P}, n)$$

$$= \inf_{\mathcal{P}} \sup_{f \in \mathcal{F}} |c_f(\mathcal{P}, n) - c_f|$$

$$= \frac{1}{F_{n+1}}.$$

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

对称策略：黄金分割法 $\mathcal{W}$, $x_1(\mathcal{W}) = \omega$

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{1 + F_{n-1}/F_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

$$\omega = \frac{1}{1 + \omega}. \quad \omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx \mathbf{0.618}.$$

Jack Carl Kiefer, 1924–1981

Master's thesis



最优试验设计

Fellow of NAS, 1975

华罗庚(Hua, Loo-Geng) 1910–1985. 优选法

最优, $\mathcal{F}_n$ 是其近似.

丢番图逼近: $\{F_n/F_{n+1}\}_{n \geq 1}$ 构成 ω 的最佳逼近.

定义

称 $\mathcal{P}$ 为**来回调试策略**, 如从第 3 步开始, 每一步都在剩余区间上安排试点.

华罗庚(Hua, Loo-Geng) 1910–1985. 优选法

定理 (华罗庚, 1971, 1981)

对于每一来回调试策略 $\mathcal{P}$, 当 $n \gg 1$ 时, 有 $\delta(\mathcal{P}, n) \geq \delta(\mathcal{W}, n) = \omega^n$. 换言之, 黄金分割法是来回调试策略中在无穷远处的最优策略.

洪加威(1973, 1974):
来回调试策略 $\rightarrow$ 一般策略.

优选法平话

齐 念 一

优选法平话

(只限国内发行)

科学出版社出版

北京西直门外三里河路2号

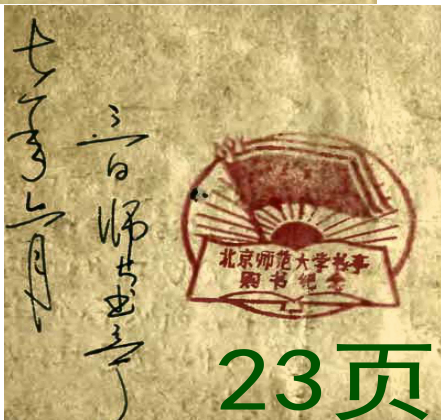
中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1971年5月第一版 1971年5月第一次印刷

定价：0.07 元



1972年7月

优选法及其实例

广东省、广州市优选法推广办公室编

0.618.....

广东人民出版社



优选法及其应用

陈木法

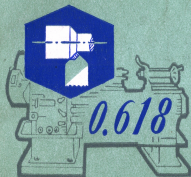
1972年10月

北京人民出版社

优选法话本

1973年6月

辽宁人民出版社



刘明光 刘文魁 编著
董庭辉 朱鲁峰

优选法在金属切削中的应用

1975年8月

科学出版社

1975年7月

优选法

中国科学院数学研究所
运筹室优选法小组

优选法平话及其补充

陈木法 著

1971

不定次数条件下的优选法

Kiefer: n 步最优; 华: 无穷远处最优.

都预先定了实验次数. 为适用于所有次数, 依“极大极少化”原理, 需寻求使

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{f \in \mathcal{F}} |c_f - c_f(\mathcal{P}, n)|$$
$$= \sup_{n \geq 1} \delta(\mathcal{P}, n)$$

达到最小的策略 $\mathcal{P}$.

不定次数条件下的优选法

相对误差

$$\frac{\delta(\mathcal{P}, n) - \delta(\mathcal{F}_n, n)}{\delta(\mathcal{F}_n, n)} = F_{n+1} \delta(\mathcal{P}, n) - 1,$$

$$\delta(\mathcal{P}) = \sup_{n \geq 1} F_{n+1} \delta(\mathcal{P}, n).$$

—称为策略 $\mathcal{P}$ 的精度

不定次数条件下的优选法

定义

称 $\mathcal{D}$ 为**对称策略**, 如从第 2 步开始, 它依对称规则安排试点.

不定次数条件下的优选法

定义

称 $\mathcal{P}$ 为**对称策略**, 如从第 2 步开始, 它依对称规则安排试点.

定理 (陈, 1977)

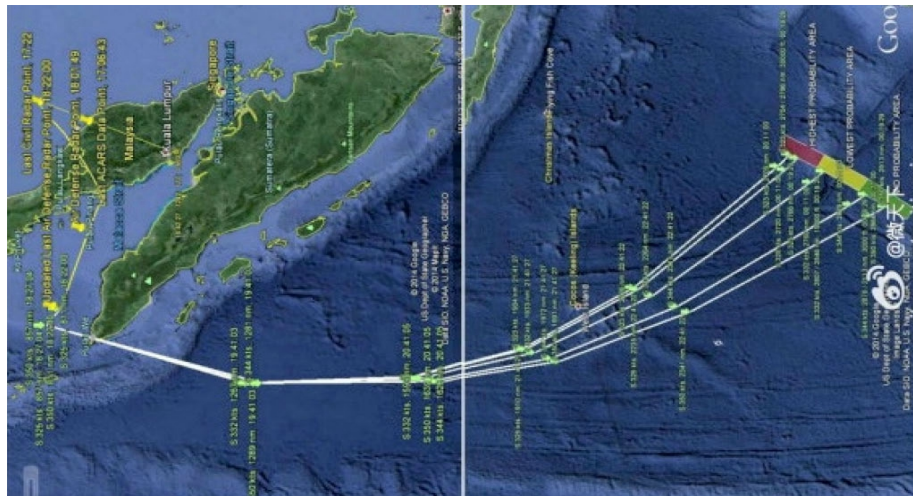
对于每一对称策略 $\mathcal{P}$, 有 $\delta(\mathcal{P}) \geq \delta(\mathcal{W})$.
换言之, 黄金分割法是对称策略中不定次数条件下的最优策略.

马航 MH370. 2014 年 3 月 25 日路线图

信号源: 黑匣子, 找飞机=求最大.



马航 MH370. 2014 年 5 月 2 日路线图



亚航QZ8501;2014/12/27-30 微弱手机信号



马航 MH370. 26 国联军, 每步(批)多试点
每步(批) $2i$ ($i \geq 1$) 个试点. 固定 $i \geq 1$.

定义

称 $\mathcal{D}$ 为**基本策略**, 如在第 j 步, 新试点和上次留下来的好点将实验区间分为长度为 α_j 和长度为 β_j 两两相间的诸段.



定义 (固定 i)

基本策略 $\mathcal{E}_n^{(i)}$ (固定 n):

$$\alpha_1 = \frac{2(i+1)^{n-1} - 1}{2(i+1)^n - 1},$$
$$\beta_1 = \frac{1}{2(i+1)^n - 1}.$$

基本策略 $\mathcal{E}^{(i)}$: $\alpha_j = \beta_j \ \forall j$ 均分

n 步精度:

$$\delta(\mathcal{P}, n) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |c_f - c_f(\mathcal{P}, n)|$$

$$\delta(\mathcal{E}_n^{(i)}, n) = [2(i+1)^n - 1]^{-1} =: E_n^{(i)-1}$$

$$\delta(\mathcal{E}^{(i)}, n) = [(2i+1)(i+1)^{n-1}]^{-1}$$

每步 $2i$ 个试点, 不定步数的精度:

$$\delta(\mathcal{P}) = \sup_{n \geq 1} E_n^{(i)} \delta(\mathcal{P}, n)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mathcal{E}_n^{(i)}$ 退化.

此时不存在无穷远处的最优策略.

不定步数条件下的优选法

定理 [陈, 1977] ($i \geq 2$)

当 $i \geq 2$ 时, 每批 $2i$: $\mathcal{E}^{(i)}$ 最优.

不定步数条件下的优选法

定理 [陈, 1977] ($i \geq 2$)

当 $i \geq 2$ 时, 每批 $2i$: $\mathcal{E}^{(i)}$ 最优.

当 $i = 1$ 时, 结论不同. 例如每批 2 个,

$$\alpha_1 = \frac{3}{7}, \quad \beta_1 = \frac{1}{7} \quad \boxed{\text{非均分}}$$

广义分数法与广义黄金分割法 略上标*i*

广义 Fibonacci 数列: $F_0 = F_1 = 1$,

$$F_n = \textcolor{red}{i}(F_{n-1} + F_{n-2})$$

广义分数法: 每批 $2i - 1$ 个试点

$$\alpha_1 = F_n / F_{n+1}, \quad \beta_1 = F_{n-1} / F_{n+1}$$

广义黄金分割法: $\alpha_1 = \omega(i), \beta_1 = \omega(i)^2$,

$$\omega(i) = \lim_n \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{i(i+4)} - i}{2i}$$

不定步数条件下的优选法

定理 [C. & Huang, D.H., 1995] ($i \geq 1$)

每批 $2i-1$: 基本策略类中的最优者为

$$\alpha_1 = \left\{ \frac{1}{i} \left[\frac{i+1}{2} \right] + \chi(i)\omega \right\} \omega, \quad \beta_1 = \frac{1}{i} - \alpha_1$$

$\chi(i) = 0$ 奇数 i ; $= 1$ 偶数 i

除非 $i=1$, 这不同于广义黄金分割法

$$\mathcal{W}^{(i)}: \alpha_1(\mathcal{W}^{(i)}) = \omega, \quad \boxed{\omega = \omega(i)}$$

$$\beta_1(\mathcal{W}^{(i)}) = 1 - \alpha_1(\mathcal{W}^{(i)}) = \omega^2.$$

进一步课题

- 多因素情形
- 随机情形：线性规划
- 随机情形：经济最优化的数学模型
陈、毛永华：《随机过程导论》
§4.3: 最优停止(女秘书)问题
- 随机情形：抓逃犯

进一步读物

- 陈(1977).

论不定次(批)条件下单因素优选问题的最优策略

贵阳师范学院学报 第3期, 117-134

- 陈(1979).

试论“必须设对照试验的优选法”

北京师范大学报 第4期, 1-6.

- C. and Huang, D.H. (1995).

On the optimality in general sense for
odd-block search

Acta Math. Appl. Sin. 11:4, 389-404.

- Kiefer, J. (1953).

Sequential minimax search for a
maximum

Proc. Amer. Math. Soc. 4, 502-506

- 洪加威(1973).

论黄金分割法的最优性

数学的实践与认识 2, 34-41

- 洪加威(1974).

论批数不限定情况下一维优选问题的最优策略

中国科学 2, 131-147

- 齐念一[华罗庚] (1971).

优选法平话

科学出版社, 北京

- 华罗庚(1981).

优选学

科学出版社, 北京

- Wilde, D.J. and Beightler, C.S. (1967)

Foundations of Optimization

Prentice-Hall, Inc.

中译本：优选法基础. 龙云程译，

科学出版社, 1978

- Kolda, T.G., Lewis, R.M., Torczon, V.
(2003)

Optimization by Direct Search: New
Perspectives on Some Classical and
Modern Methods

SIAM REVIEW Vol. 45, No. 3,
385 – 482

- Conn, A.R., Scheinberg, K., Vicente, L.N. (2009)

Introduction to derivative-free optimization

SIAM

谢谢大家!

48