

华氏经济优化理论与马氏链

陈木法

(江苏师范大学 北京师范大学)

中科院数学与系统科学研究院杰出学者讲座
(华罗庚实验室联合邀请)

2023 年 2 月 22 日

概要

- 投入产出模型, 华理论及修正与更新;
- 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析;
- 预测与调整及经济结构的优化.

1 投入产出模型, 华理论及修正与更新

所关心的产品所构成的**产综** [固定单位: 甬, 吨,...]:

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}).$$

考察当前经济的三种数据

- 去年的投入: $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(d)})$
- 今年的产出: $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)})$
- 结构方阵 (消耗系数方阵): $A = (a_{ij})$ (假定时齐). 每生产一个单位的 i 类产品, 需消耗 a_{ij} 个单位的 j 类产品. $x_0 = x_1 A$

投入产出法

$$x_{n-1} = x_n A, \quad x_0 = x_n A^n; \quad x_n = x_0 A^{-n}, \quad n \geq 1.$$

非负、不可约矩阵的三大特征

$A = (a_{ij})$. 边: $i \rightarrow j, a_{ij} > 0$. 连通图=不可约.

定理 (Perron-Frobenius 1907, 1912)

每一非负、不可约矩阵都有**三大特征**:

- **最大特征值** $\rho(A)$ 是正的单重特征值.
- **最大左特征向量** u (行向量)为正.
- **最大右特征向量** v (列向量)为正.

左、右正特征向量 u (行)与 v (列): $\rho = \rho(A)$

$$uA = \rho u, \quad Av = \rho v.$$

区分: 生产资料与消费资料

$\forall \lambda: |\lambda| \leq \rho(A)$, 若 A 含一个正对角元素, 则仅有 $<$.

华罗庚基本定理. 左正特征向量法

无消费情形[理想化模型]: $x_{n-1} = x_n A, n \geq 1$.

$$\rho(A) = \lambda_{\max}(A), \text{ 左 } u \text{、右 } v$$

- 最好的投入 $x_0 =$ **最大左特征向量** u .
此时有最佳发展速度 $1/\rho(A)$. **优化 1**: $x_0 = u$
- 否则, 如非周期且 $x_0 \neq u$, 则必然走向失衡或崩溃: 即

失衡时 $T_{x_0} = \inf\{n: x_n \text{ 的某个分量} \leq 0\} < \infty$.

崩溃时 $T_{x_0}^+ = \inf\{n: x_n \text{ 的某个分量} < 0\} < \infty$.

前所未有的贡献是**优化 2**: $T_{x_0}^+ = \infty \implies x_0 = u$.

先前平衡解源于不动点定理, 华理论可计算

华罗庚基本定理的证明 [陈 1989/9]

$A = P: 0 \leq P, P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, **最大右特征对 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$** ,

此处 $\mathbf{1}$ 为分量均为 1 的列向量. 遍历定理:
假定 P 不可约、**非周期**, 则

$$P^n \rightarrow \mathbf{1}\pi \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad 0 < \pi, \pi\mathbf{1} = 1,$$

$$\pi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \dots, \pi^{(d)}).$$

证明 设 $\mu_0 = \mu_n P^n \forall n, 0 \leq \mu_0, \mu_0 \mathbf{1} = 1$. 则由 $P\mathbf{1} = \mathbf{1} \Rightarrow \mu_n \mathbf{1} = 1 \forall n$. 由此及 $\{\mu_n\}$ 非负知: $\exists \{\mu_{n_k}\} \rightarrow \bar{\mu}$ 且 $\bar{\mu}\mathbf{1} = 1$. 于是

$$\mu_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k} P^{n_k} = \bar{\mu}\mathbf{1}\pi = \pi. \quad \square$$

一般的 A 可转化为 P [?]

例. 华取自 W. Leontief, 1965. 敏感性

$$A = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{bmatrix}, \quad \text{农业、制造业}$$

$$\rho(A) = \frac{1}{200} (37 + \sqrt{2409}) \approx 0.430408,$$

$$u = \left(\frac{5}{7} (13 + \sqrt{2409}), 20 \right) \approx (\underline{44.34397483}, 20).$$

演示稿第 18 页的补充: $u \odot v$ 的经济学含义.

u 表示各产品的数量, v 表示各产品每个单位的真实价值(常不同于市场价格 [华书 1987; 第一章 § 7]), $u \odot v$ 即是各产品的真实总产值, 有统一量纲. 再次说明等级排序的合理性.

$x_n = x_0 A^{-n}$ 与 $\mu_n = \mu_0 P^{-n}$ 的比较.

$x_0 = (44.344, 20)$. $T_{x_0} = 8$. $1/\rho(A) \approx 2.3$

相同的稳定性

n	1	2	3
x_n	(103.028, 46.4677)	(239.375, 107.96)	(556.111, 250.868)
n	4	5	6
x_n	(1292.85, 582.247)	(2990.66, 1362.96)	(7165.52, 2998.2)
n	7	8	
x_n	(13054.5, 9754.73)	(89821.2, -23501.9)	(2)

$\mu_0 = (34.4118, 20)$. $T_{\mu_0} = 8$. $\rho(P) = 1$ 相同的崩溃时间和产品

n	1	2	3
μ_n	(34.4118, 20.0001)	(34.4122, 19.9996)	(34.4092, 20.0026)
n	4	5	6
μ_n	(34.4303, 19.9815)	(34.28, 20.1318)	(35.351, 19.0608)
n	7	8	
μ_n	(27.7201, 26.6917)	(82.0905, -27.6787)	(2)

差别 $\frac{89821.2}{82.0905} = 1094$. 只是 2×2 方阵. P 优于 A

带消费实用模型. 投入 $y_n = y_0((1-\alpha)A^{-1} + \alpha I)^n$

论文	刊发杂志及收、发日期
IV	科学通报 1983/10/18 收
英文	美国科学院 1984/5/4 收
X	科学通报 1984/11/22 收
XI	科学通报 1985/4/20 写; 1985/7/25 收
H+H	数学通报 1985/8/29 发
书	写 1985, 财经出版 1987. 仙逝 1985/6/12

三步	表达式	文献
(1)	$x_n - \xi_n = x_{n+1}A$, ξ_n : 消费量	IV, 英文
(2)	(1) 的左边 $\rightarrow y_n$	X, H+H
(3)	(1) 中取 $\xi_n = \gamma(x_{n+1} - x_n)$	书

情形 (2): $y_n = y_0 B_{\alpha}^n$

已知 $y_{n-1} = x_n A$, 即 $x_n = y_{n-1} A^{-1}$. 此时第 n 年增产的 $\alpha \in (0, 1)$ 倍为 $\alpha(x_n - y_{n-1})$. 以此作为消费, 第 n 年可用于第 $n+1$ 年生产的产综为

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \alpha(x_n - y_{n-1}) \\ &= y_{n-1}((1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I) \\ &=: y_{n-1} B_{\alpha}. \end{aligned}$$

情形 (3):

1985 写, 1987 出版

$$x_n - \gamma(x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} A,$$

$$x_n = x_{n+1} A_{\gamma}, \quad A_{\gamma} = \frac{A + \gamma I}{1 + \gamma}. \quad \gamma \in (0, 1)$$

华的更新与新挑战 [≤ 2021 年前全部使用 (2)]

带消费实用模型[1985/87 书]. 消费比例 $\gamma \in (0, 1)$.

$x_0 = x_n A_\gamma^n$, $n \geq 1$, 更新: 回到非负阵[无消费]

$$A_\gamma = \frac{A + \gamma I}{1 + \gamma}, \quad \rho(A_\gamma) = \frac{\rho(A) + \gamma}{1 + \gamma}.$$

华文集 9 卷, 2010. 应数 II, (I)-(X)+王元文. 8 行.
未收入华'85 原著. 37 年后才被唤醒, 2021.11 (陈).

$\rho := \rho(A) < 1$ (假设). 经济增长速度: $\gamma \uparrow \infty?$

$$\frac{1}{\rho(A_\gamma)} - 1 = \frac{1 - \rho}{\gamma + \rho} \downarrow \frac{2}{1 + \rho} - 1 > 0, \quad \gamma \uparrow 1$$

$\rho = \frac{1/2}{1/3}$

华书令人深思的序言

“序言是在书成之后写的，但总放在书的前面。探索也往往如此，由简单开始，在实践中，在思考中不断深化，不断发展。新的概念和方法出现，旧的不断被扬弃或遗忘，因而思索与实践的宝贵过程反而淹没不见了，而书上、文章上所见到的是成熟的或作者自以为成熟的结论。

当然，我不是说体系完备、证明严正的书不必要，而是说读者往往要花很多的时间和精力，才能领会这些结果是怎样得来的，作者为什么如此表达的，等等。”

华氏基本定理. 修正与再更新

带消费实用模型[新]. 消费倍数 $\gamma := \frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

$$(4) \quad x_0 = x_n A_{\alpha}^n, \quad n \geq 1,$$

$A_{\alpha} = (1 - \alpha)A + \alpha I$ 回到非负阵. $A_0 := A$.

[无消费算子 A 与无增长算子 I 的凸组合]

$\rho(A_{\alpha}) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha$. $A_{\alpha} (\alpha < 1)$ 同 u, v

倍数: $\gamma = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$. 增长很小时需倍数很大[平衡].

旧算子 (2)	新算子 (4)
$B_{\alpha} = (1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I$	$A_{\alpha} = (1 - \alpha)A + \alpha I$
实矩阵, 需使用整个谱	非负矩阵, 最大特征对

关键变换(初级) $A \rightarrow P, u \odot v$ 分量积

$$A_w = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0 \quad \boxed{D_w x = w \odot x}.$$

定理 (陈 1989/1992)

- A_w 成为转移概率 P 当且仅当 $w = v$.
- P 的左特征向量为 $\mu := u \odot v$, 归一化为 $\pi := u \odot v / (uv)$. 平稳分布 $\pi = \pi P = \pi P^n$.

证明 不妨设 $\rho(A) = 1$. 那么 1: 分量恒为 1 的列向量

$$A_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A D_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A w \stackrel{?}{=} \mathbb{1}$$

第一项断言成立当且仅当 $A w = D_w \mathbb{1} = w$.

关键变换(初级) $A \rightarrow P$

$$P = D_v^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_v.$$

往证第二项断言: $\mu P = \mu$. 设 $\rho(A) = 1$. 则

$$\begin{aligned} \mu P &= u \odot v D_{v^{-1}} A D_v = u \odot v \odot v^{-1} A D_v \\ &= u A D_v = u D_v = \mu. \quad \square \end{aligned}$$

应用于特征向量 v 的计算. 幂法或反幂法:

第一、二拟对称化技术: 抹平矩阵元素, 拉直 v .

1) 将两头拉平; 2) 硬算求更好者; 3) 回到上方

的 $A \rightarrow P$. 令 $\bar{P} = D_{\tilde{v}}^{-1} A D_{\tilde{v}}$. 则
 $\tilde{v} \sim v \implies \bar{v} \sim \text{constant } \mathbb{1}.$

应用于大矩阵特征对的计算

以 P 为例, 如矩阵阶很大, 计算其 μ 时, 某些分量可能溢出. 此时我们引进**重排序方法**. 将 μ 的分量从大到小重新排序, 导出指标 $(1, \dots, d)$ 的一个重排 τ . 进而得到新的 $\tilde{P}$. 可证**两者有相同的稳定性**.

部分分量(指标), 如 $\geq 10^{-12}$, > 0 , 重排.

用于大稀疏阵特征对计算: 6 万、2 百万阶, 前 6 个.

C. & R.R. Chen. Top Eigenpairs of Large Scale Matrices. CSIAM Trans. Appl. Math. 2022, 3(1).

带消费. $A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I \rightarrow P_\alpha$

$$\rho(A_\alpha) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha, \quad \boxed{\text{用 } P \text{ 表出 } P_\alpha}$$

$$\begin{aligned} P_\alpha &= D_{v^{-1}} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_v \quad (A_\alpha \text{ 与 } A \text{ 有相同的 } v) \\ &= \rho(A_\alpha)^{-1} [(1 - \alpha) D_{v^{-1}} A D_v + \alpha I] \\ &= \rho(A_\alpha)^{-1} \left[(1 - \alpha) \rho(A) D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v + \alpha I \right] \\ &= (1 - \beta_\alpha) P + \beta_\alpha I, \quad \beta_\alpha := \alpha / \rho(A_\alpha). \end{aligned}$$

引理 (陈 2022)

相应于 A_α , 我们有 P_α 如上. 进而 P_α ($\alpha < 1$) 有相同的左、右特征向量 $u \odot v$ 与 $\mathbb{1}$.

2. 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析

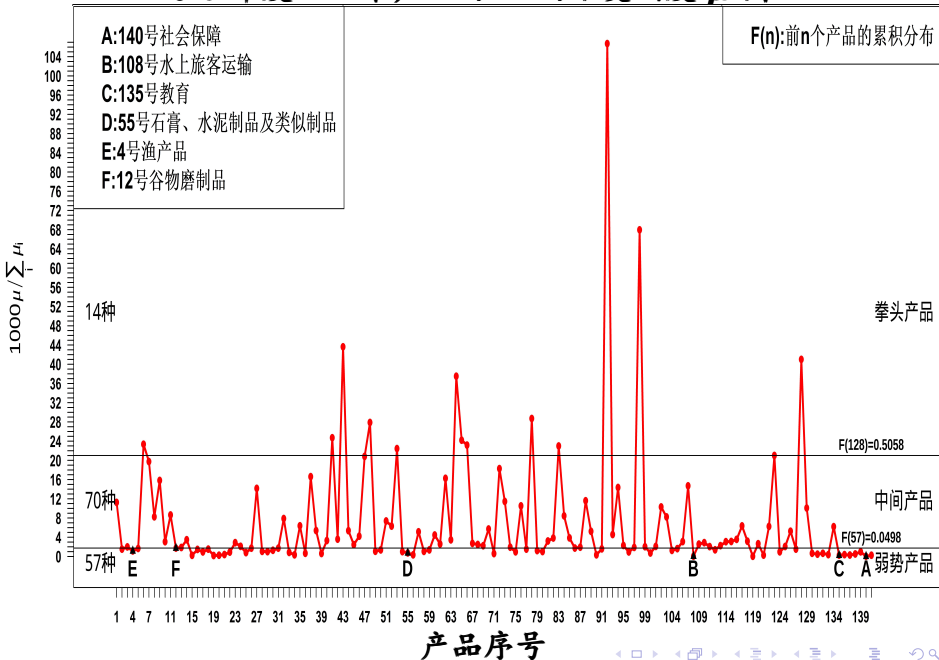
等级(排序)规则: 产品等级以 $u \odot v$ 的大、小为序.

使用 P 及 $\mu := u \odot v$ 的两大优点:

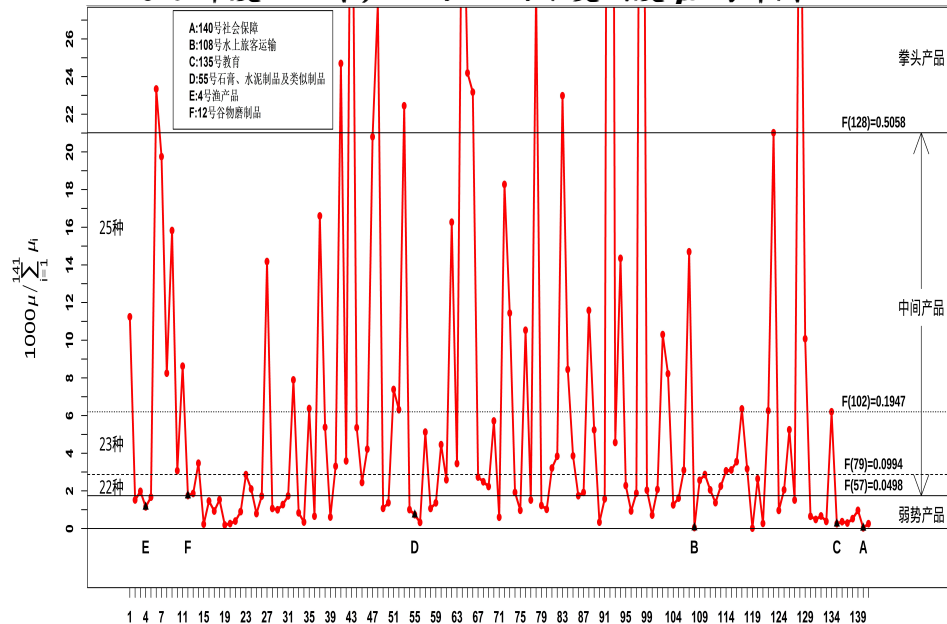
- μ 综合了 A 的三大特征, 而 u 仅用其中两个.
- 使用 P 或 A 的稳定性完全重合, 但前者的振幅远小于后者.

下面两张图给出从 2017 年国家级投入产出表得到的产品等级: 拳头产品(支柱产业)、中间产品和弱势产品(瓶颈产业)的图示. 我国每 5 年编制一个投入产出表, 2017 年是目前最新的. 将 μ 的分量由大到小排序, 给出产品等级 ProductRank.

2017 年度 141 个产品的 P 的不变测度 μ 图

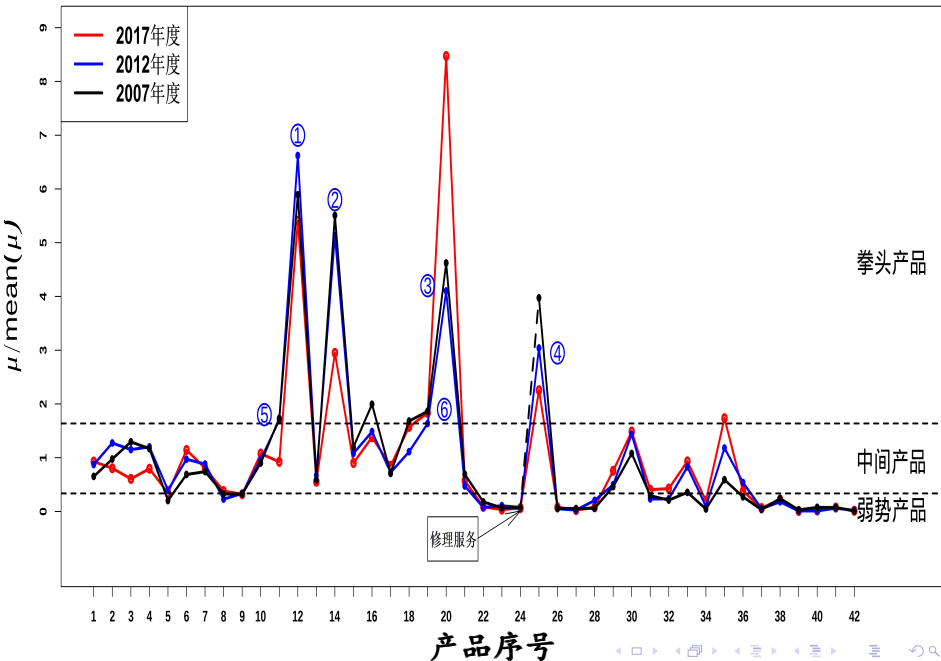


2017 年度 141 个产品的 P 的不变测度 μ 局部图

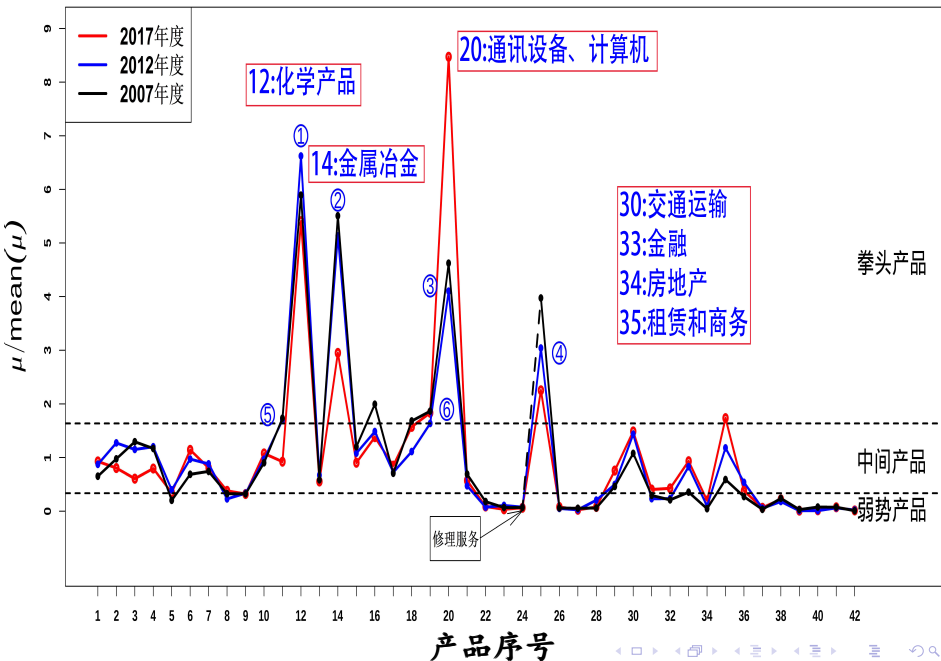


产品序号

2017、2012 年度 42 个产品和 2007 年度 41 个产品的 μ 图



2017、2012 年度 42 个产品和 2007 年度 41 个产品的 μ 图



使用 π 对产品分类

前面已使用 μ 对产品排序, 这当然这与使用 π 是等效的. 此处说明: 使用 π 有助于产品分区.

$\pi = (\pi_k)$ 为 P 的唯一平稳分布 $\pi = \pi P^n, n \geq 1$.

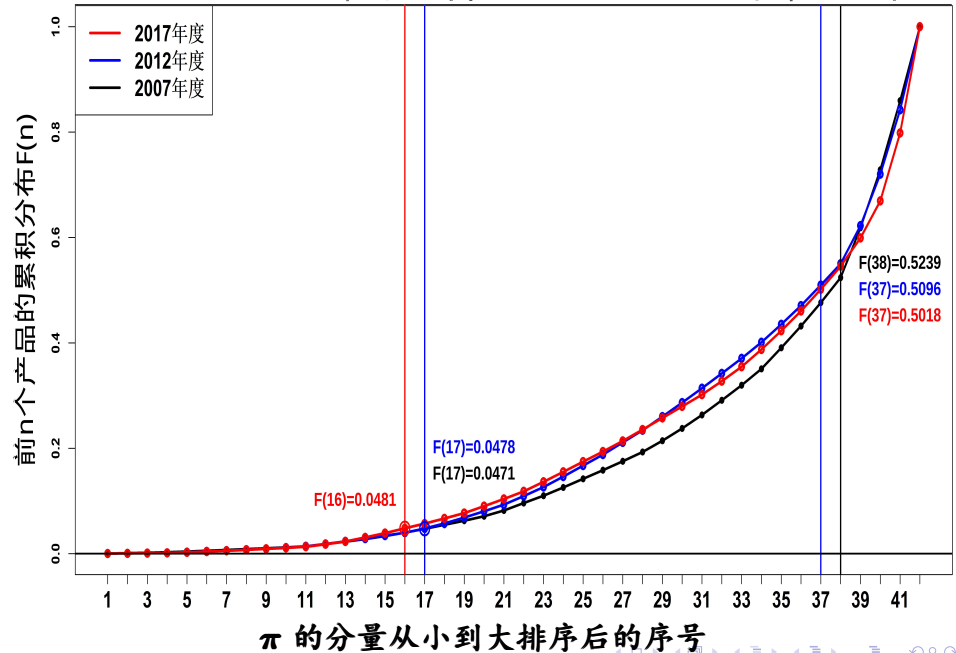
对每一 k , π_k 刻画了第 k 个产品对经济系统 A 稳定性的贡献. 将 π 的分量由小到大重排为

$p_1, p_2, \dots, p_{42}$. 由此得出 $F(n)$: 前 n 个的累积(概率)分布函数[注意三条曲线很接近]:

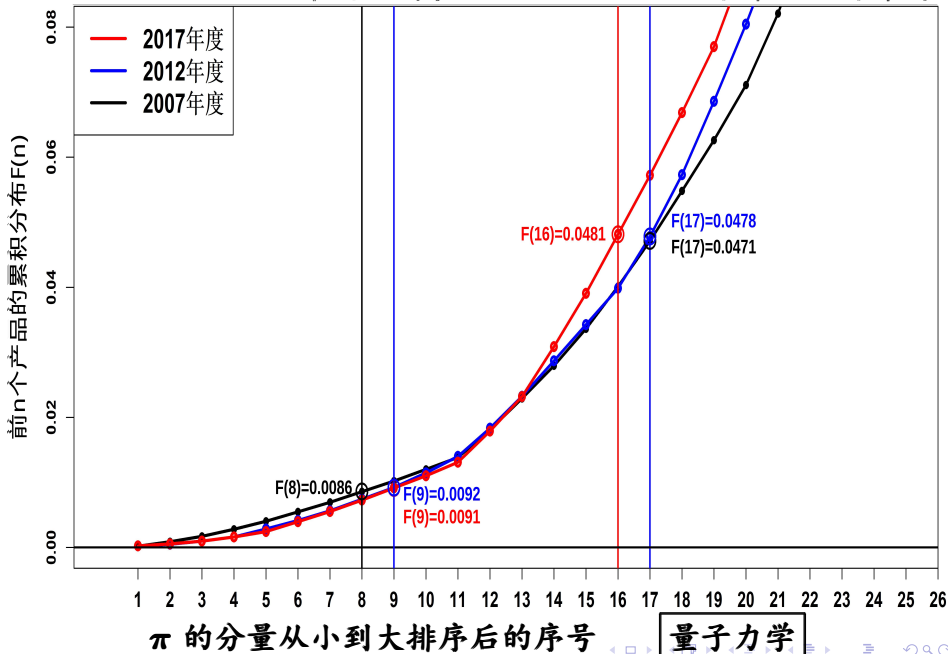
$$F(0) = 0, F(n) = \sum_{j=1}^n p_j, F(42) = 1.$$

自然, 随后图的左下方 ≤ 0.05 或更小些的产品可视为弱势者; 而右上方的 6 个产品为拳头产品. 余者为中间产品. 如同前两表一样, 2007 年所缺的 24 号产品需使用某种插补.

2007、2012、2017 三年度 42 个产品 P 的 π 的累积分布函数图



2007、2012、2017 三年度 42 个产品 P 的 π 的累积分布函数局部图



L-华模型稳定性. 使用 $P_\alpha: \mu_n = \mu_0 P_\alpha^{-n}$

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$		0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
μ_0						
$\mu_0^{(1)}$		3	7	10	14	62
$\mu_0^{(2)}$		8	17	23	36	157
$\mu_0^{(3)}$		13	28	38	58	256

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+ \quad (2)$$

表中 μ_0 有三种选择: $\{\mu_0^{(j)} = x^{(j)} \odot v, 20\}_{j=1}^3$,
 $\{x^{(j)}\}_{j=1}^3$ 分别取为 44, 44.344, 44.34397483,
 $v^{(1)} = \frac{1}{80}(13 + \sqrt{2409}) \approx 0.77602$. $v^{(2)} = 1$

产品(产业)等级(排序). 山东模型

$P =$

$$\begin{bmatrix} .16361 & .461601 & 3.41348 \cdot 10^{-6} & .00394584 & .363128 & .00771248 \\ .0751298 & .815676 & .00292973 & .0212989 & .0620879 & .0228774 \\ 0 & .897299 & .000497625 & .0401886 & .0293662 & .0326491 \\ .00318995 & .690124 & .0390138 & .126384 & .0572215 & .0840666 \\ .0148452 & .506708 & .0844566 & .0965327 & .0753257 & .222132 \\ .00623491 & .615862 & .132611 & .0709605 & .0338554 & .140476 \end{bmatrix}$$

$$\mu = (4.2271, 45.7599, 1, 1.95712, 4.98704, 2.77413),$$

$$u = (9.39469, 47.5425, 1, 3.29471, 7.7896, 5.27587).$$

等级 \ 产品号	1	2	3	4	5	6
u/μ						
u	②	①	⑥	⑤	③	④
μ	③	①	⑥	⑤	②	④

产品(产业)等级(排序). 山东模型

下面是关于 μ_0 的三种不同取法 $\{\mu_0^{(j)}\}_{j=1}^3$:

μ 的整数部分, 小数点后 3 位, μ 的全 6 位表示和不同的 α , T_{μ_0} 的计算结果.

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
μ_0				
$\mu_0^{(1)}$	3 (6)	4 (6)	5 (6)	21 (6)
$\mu_0^{(2)}$	10 (4)	14 (5) (4)	20 (4)	81 (4)
$\mu_0^{(3)}$	13 (6)	17 (6)	25 (6)	104 (6)

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+ \quad \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6}.$$

崩溃产品集中在尾部, 验证了排序的合理性.

3. 预测与调整及经济结构的优化.

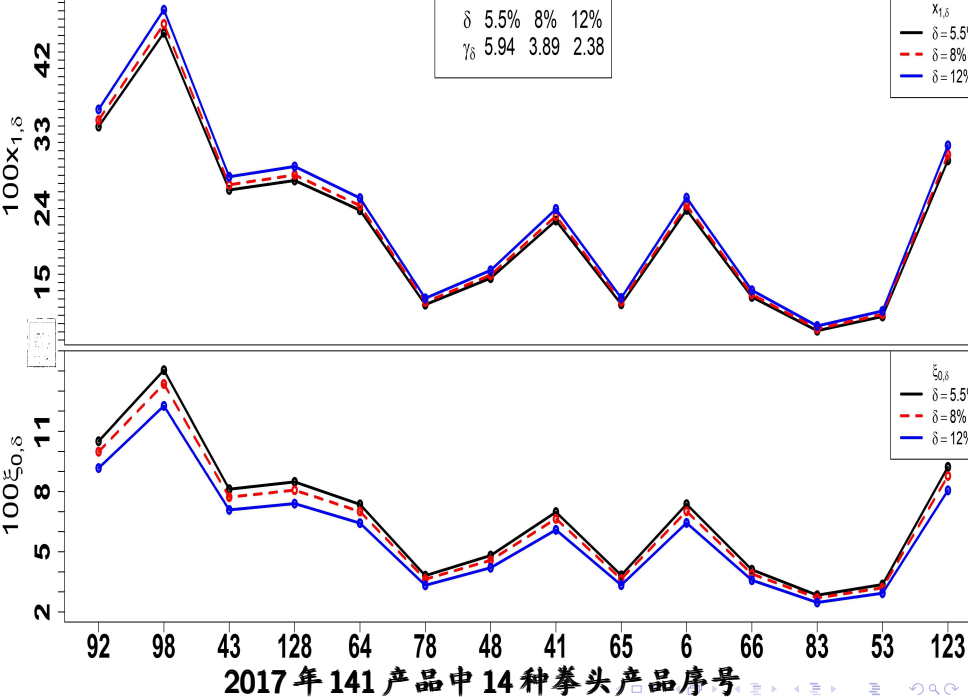
推论 (预测与调整 (陈 2022))

设增长速度为 $\delta \in (0, \min\{\rho(A)^{-1} - 1, 1\})$, 令 $\alpha = (1 - \rho(A))^{-1}[(1 + \delta)^{-1} - \rho(A)]$ 及 x_n 为递推方程 $x_n = x_{n+1}[(1 - \alpha)A + \alpha I]$ 的解, 其中 x_0 为预定初值. 则第 $n + 1$ 年的可用消费量为

$$\xi_n = \frac{1 - (1 + \delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1} - x_n).$$

反之, 由第 $n + 1$ 年的消费不超过 ξ_n 可确定最大增长速度 δ .

下图是对于 $\delta = 5.5\%, 8\%, 12\%$ 所算出的第一年的产综 $x_{1,\delta}$ 和可用消费量 $\xi_{0,\delta}$. 仅画出拳头产品.



2017年141产品中14种拳头产品序号

经济结构的优化. 对偶变换 $A \rightarrow Q$ [新]

$$P = D_v^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_v \text{ 行和为 } 1, \quad \boxed{1, u \odot v \text{ (左)}, \mathbb{1} \text{ (右)}}$$

$$Q = D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1} \text{ 列和为 } 1, \quad \boxed{1, \mathbb{1}^* \text{ (左)}, u \odot v \text{ (右)}}.$$

证明 依然设 $\rho(A)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{1}^* A_w &= \mathbb{1}^* D_w A D_w^{-1} = w A D_w^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbb{1}^* \\ &\iff w A = \mathbb{1}^* D_w = w \\ &\iff w = u. \quad \square \end{aligned}$$

胡发胜、王明栋、贾传亮: 山东大学学报 (理) 2004

关键变换(中级): 经济结构的优化

问题: 立足于当前 A , 构造以 $\tilde{u}$ 为目标产综的 $\tilde{A}$.

应用对偶变换, 得出两个 Q 然后取 $\tilde{Q} = Q$

$$\tilde{Q} = D_{\tilde{u}} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} D_{\tilde{u}}^{-1}, \quad Q = D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} &= D_{\tilde{u}}^{-1} \tilde{Q} D_{\tilde{u}} = D_{\tilde{u}}^{-1} D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1} D_{\tilde{u}} \\ &= D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}. \end{aligned}$$

末两行比演示稿略有简化

关键变换(中级): 经济结构的优化

定理 (优化矩阵. 五人文 2022)

具有最大左特征对 $(\rho(A_\alpha), u)$ 的投入产出结构矩阵 A_α 关于目标产综 $\tilde{u}$ 的优化矩阵 $\tilde{A}_\alpha$ 可选为

$$\frac{\tilde{A}_\alpha}{\rho(\tilde{A}_\alpha)} = D_w^{-1} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_w, \quad \alpha < 1,$$

其中 $w = \tilde{u} \odot u^{-1}$. 再优化: $\kappa \tilde{A} / \rho(\kappa \tilde{A})$

上式右方 = $\rho(A_\alpha)^{-1} A_\alpha \odot H$, $H = (h_{ij})$, $h_{ij} = \frac{u_i \tilde{u}_j}{\tilde{u}_i u_j}$, 而 $A \odot H = (a_{ij} h_{ij})$. $h_{ij} > 1$, < 1 表 a_{ij} 不足或过剩.

关键变换(高级: 任意正的 w)

D_w : 以向量 $w = (w^{(k)} : k \in E)$ 作为对角线元素的对角矩阵.

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n = D_w^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w, \quad n \geq 1.$$

$$A \rightarrow A_\alpha, \quad \alpha < 1.$$

关键变换(高级): 一般情形

转换定理/等效原理.

固定 $\alpha < 1$

任意给定正向量 w , 定义 $\tilde{A}_\alpha$ 如上. 那么关于 $\tilde{A}_\alpha$ 的迭代解 $\{\tilde{x}_n\}_{n \geq 0}$: $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}_\alpha^n$ 与关于 A_α 的迭代解 $\{x_n\}_{n \geq 0}$: $x_0 = x_n A_\alpha^n$ 可通过恒等式

$$\rho(\tilde{A}_\alpha)^n \tilde{x}_n = \rho(A_\alpha)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

相互转换. 特别地, 对于每一个 n 和 k , $\tilde{x}_n$ 的第 k 个分量为非正(相应地, 负)当且仅当 x_n 如此.

相同稳定性: 失衡/崩溃的时间和产品都相同.

证明 略去下标 α 不写. 设 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $x_0 = x_n A^n, n \geq 0$. 则

$$x_0 D_w = x_n A^n D_w \quad \boxed{\text{目标是求 } \{\tilde{x}_n\} \text{ 满足 } \tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n}$$

$$= \left(\rho(A)^n x_n D_w \right) D_w^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w$$

$$= \left(\rho(A)^n x_n D_w \right) \left(\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n$$

$$= \left[\left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n D_w \right] \tilde{A}^n$$

$$= \left[\left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w \right] \tilde{A}^n \quad n \geq 0.$$

由于

$$x_0 D_w = \left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^0 x_0 \odot w,$$

这表明

$$\tilde{x}_n := \left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0$$

是迭代方程 $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n$ 的解. 得出等价表示:

$$\rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

最后, 因为 $\rho(A)$, $\rho(\tilde{A})$ 和 w 均为正, 定理末项断言显然. 反向思维 $A \rightarrow A_\alpha, \alpha \in (0, 1)$ 也对 □

参考文献

- 陈 (2022): 华罗庚经济最优化理论的新进展.
应用概率统计 38(2): 159-178.
- 陈彬, 陈, 谢颖超, 杨婷, 周勤 (2022):
经济系统的产品排序与结构优化.
应用概率统计 38 (4): 475-504.
- 杨婷, 周勤 (2022)[准备中]: 2017 年 141 种产品与 42 种产品的加工和分析及本报告中所用的 7 张图大多是她们完成的.
- 中国投入产出学会: <http://cioa.ruc.edu.cn/> 资料下载/投入产出表 1990-2012[+2017: 10+2]. 30 年
部门, 产业, 地区, 公司,... 此理论有望机械化

小结: 6 次使用转移概率矩阵 P

崩溃定理证明, 稳定性测试, 特征向量计算,
等级排序, 矩阵重排序, 结构优化.

华理论 $\rightarrow$ 马氏链 [崩溃速度, 随机情形]

2022/11/17: 2023 年-2026 年

国务院关于开展第五次全国经济普查的通知

<http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf>

The end!

谢谢大家!