北京师范大学数学系研究生博士论文

马尔可夫过程论中的存在唯一性和可逆性研究

作者　　陈木法
指导教师　　严士健　侯振挺

1983 年 11 月

摘要

马尔可夫过程（简称马程）在科学技术的各个领域中都有着广泛的应用. 间断型马程（又称链过程）和无穷质点马程是它的两个重要分支. 前者的历史颇为悠久，后者是六十年代末才兴起而目前又十分活跃的分支.

要将马程应用于实际问题，首先需要解决的是马程的存在性和唯一性问题. 这是一类相当困难的问题. 然而，对于全稳定情形的链过程，我们已经得到了完全的解答（第一章）.

可逆马程是一类马程，它反映了过程关于时间的对称性，刻划了"细致平衡"的物理现象，代表着大量的实际模型. 只有把这一类过程弄清楚了，才有可能进一步研究"非平衡态"模型. 因此，可逆马程值得大力研究. 这也就是本文第二～六章研究的主题.

在第0章里，我们介绍本文所研究的问题的背景、工作的意义、困难所在及主要成果。它可看作是全文的概要。附录一是作者的近作，解决了关于马程不变测度问题的 Sullivan 和 Straub 猜想。附录二是作者先前关于优选法的研究工作。附件一是作者的全部论文、著(译)作表。

作者衷心地感谢严士健教授和侯振挺教授的指导。

目录

第0章 引论

§1. β过程的存在唯一性

§2. 可逆（有势）β过程

§3. 场论

§4. 无穷质点马氏过程

第一章 β过程的唯一性准则（中、英文）

§1. 记号和术语

§2. 一些引理

§3. 主要定理的证明

第二章 有限流出有势Q过程

§1. 一般结果

§2 有限流出有势Q过程的构造

§3. 有限流出有势Q过程的构造（续）

§4. 可靠的、可逆Q过程

§5. 不断的有势Q过程的存在准则

§6. 唯一性：双流出性形

§7. 唯一性：一般性形

第三章 抽象空间中的可逆马尔可夫过程

§1. 引言

§2. 可逆马尔可夫过程

§3. 可逆分过程

§4. Kolmogorov 向前、向后方程

§5. 最小分过程和可逆性

§6. 可逆分过程的存在唯一性

第四章 马尔可夫过程与协论

§1. 古典协论

§2. 协与势协

§3. 有势协

§4. 二维格子点协

§5. N(≥2)维格子点协

§6. 有势与马尔可夫链

§7. 有势二元组随机游细

§8. 有势 N(≥2) 元组随机游细

§9. 有势马尔可夫过程

§10. 有势 Q 矩阵

§11. 有势 Q 过程

§12. 有势生灭(双边生灭) Q 过程

§13. 有势单流出 Q 过程

第五章 一般连续函数的有势性和可逆性(续)
§1. 引言
§2. 场论的推广
§3. 可逆性与拟可逆性
§4. 有势性与拟可逆性
第六章 一般连续函数的有势性和可逆性(续)
§5. 紧空间情形
§6. 排定过程的有势性和可逆性

附件一. 论文表
附件二. 参考文献

附录一. λ_π 不变测度(英文)
附录二. 优选法研究

第0章 引论

§1. 马过程的存在性一性

马尔可夫过程（简称马过程）主要有两类：一是连续型的，一是间断型的（又称跳过程）。研究马过程，首先要遇到的是存在性一性问题。这类问题相当困难，已有很长的研究历史。对于全跳过程，我们已经找到了完全的解答。这就是第一章所讨论的内容。

设 $(E, \mathcal{E})$ 是任意的可测空间，$\mathcal{E}$ 包含一切单点集 $\{x\}$ $(x \in E)$。如 f 是 $\mathcal{E}$ 可测的实函数，则记 $f \in \mathcal{E}$；如 f 还是有界（非负）的，则记作 $f \in b\mathcal{E}$ $(f \in \mathcal{E}_+)$；如 μ 是 $\mathcal{E}$ 上的有限测度，则记 $\mu \in \mathcal{M}$。

称 $P(t, x, A)$ $(t \geq 0,\ x \in E,\ A \in \mathcal{E})$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的马过程，假若

i) 对于每个固定的 t 和 x，$P(t, x, \cdot) \in \mathcal{M}$ 且 $P(t, x, E) \leq 1$；

ii) 对于每个固定的 t 和 A，$P(t, \cdot, A) \in \mathcal{E}_+$；

iii). 对于每个 t, s, x 和 A，K-C 方程

$$p(t+s, x, A) = \int p(t, x, dy)\, p(s, y, A)$$

成立；

iv). 对于每个 x 和 A

$$\lim_{t \to 0+} p(t, x, A) = p(0, x, A) = I_A(x) \equiv \delta(x, A).$$

早在 1955 年，D. G. Kendall [22] 就证明了：右导数

$$q(x) \equiv \lim_{t \to 0+} [1 - p(t, x, A)]/t, \quad x \in E$$

$$q(x, A) \equiv \lim_{t \to 0+} p(t, x, A)/t, \quad E \ni x \notin A \in \mathcal{E}$$

总存在，此处

$$\mathcal{R} \equiv \{A \in \mathcal{E}: \lim_{t \to 0+} \sup_{x \in A} [1 - p(t, x, \{x\})] = 0\},$$

而且，若对任一 $A \in \mathcal{R}$，$x \in A$，补定义

$$q(x, A) = q(x, A \setminus \{x\})$$

那么

i). $\mathcal{R}$ 是一个环；

ii). 对于每个 $A \in \mathcal{R}$，$q(\cdot)$ 和 $q(\cdot, A) \in \mathcal{E}_+$；

iii). 对于每个 $x \in E$，$q(x, \cdot)$ 是 $\mathcal{R}$ 上的测度.

在统计物理、排队论与实际模型中，我们

转移首先得到的是转移速度 $q(x)-q(x,A)$，而不是 $P(t,x,A)$. 因此，应用概率论工具来研究这些问题时，第一个需要解决的问题就是：对于给定的 $q(x)-q(x,A)$，是否存在一个马程，使其在零点的右导数就是 $q(x)-q(x,A)$. 其次，如果存在，何时唯一？若存在而非唯一时，如何把它们统统找出来？这些就是马过程理论所要研究的基本问题。半个世纪以来，许多著名的概率论学者对于这一课题的研究作了长期的努力，取得了丰富的成果. 例如见王梓坤[23]等[23], [24] 和 [25] 及其中所附的参考文献.

最早提出这一课题的是 W. Feller[26]. 他在那里已经论及抽象空间 $(E,\mathcal{E})$ 中的马过程. 然而，由于问题本身的难度，在以后相当长的时间里，人们只讨论离散状态空间，即 $E=\{i,j,k,\cdots\}$ 为可列集的情形. 此时，由上述 Kendall 的结果知，右导数 $q_i \equiv \lim\limits_{t\to 0+}(1-P_{ii}(t))/t$ 和 $q_{ij} \equiv \lim\limits_{t\to 0+} P_{ij}(t)/t$ $(i\neq j)$ 都存在，而且

$$0\leqslant q_i \leqslant +\infty\ ,\ 0\leqslant q_{ij}<\infty\ (i\neq j)\ ,\ \sum_{j\neq i} q_{ij}\leqslant q_i$$

满足这些条件的矩阵 $Q\equiv(q_{ij})$ 称为 Q 矩阵.

相应的马氏 $P(t)=(P_{ij}(t))$ 称为Q过程（离散状态空间马氏Q过程而不写Q过程，这里既有历史上的原因，又有便于区别之便，所以我们沿用这些记号）. 如果对于每个 $i\in E$，$q_i<+\infty$，则称 $Q=(q_{ij})$ 是全稳定的. 如 $\sum_{j\neq i} q_{ij}=q_i$ $(i\in E)$，则称Q是保守的. 除非另有申明，我们只讨论全稳定情形.

对于任给的Q矩阵 $Q=(q_{ij})$，Q过程的存在性早已由 W. Feller (1940)[26] 和 J. Doob (1945)[27] 解决. 当Q保守时，Q过程的唯一性由 W. Feller[29] 和 G.E.H. Reuter[28] 在1957年同时解决. 一般情形（即允许非保守）的唯一性问题是由侯振挺[30] (1974) 解决的. 这就是荣获英国1978年 Davidson 奖的侯氏定理.

关于抽象空间中的马过程，胡迪鹤曾做不少工作. 特别在1966年，他将 Reuter 的工作推广到抽象空间，得到了保守情形的唯一性定理[31]. 能否把侯氏定理推广到抽象空间呢？1978年侯振挺教授向笔者建议了这一研究课题. 我们很快就发现，抽象空间中的任一马过程（按照胡

迪鹤的定义）必定满足 Kolmogorov 向后方程（简记柯氏向后方程），因此，唯一性问题跟保守性的形无本质区别。可惜，这并不能把侯氏定理包括进去。因为 Q 过程未必满足柯氏向后方程。原来，规定 q 过程时，要求

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P(t,x,A)}{t}=q(x,A)$$

对于一切 $x\notin A\in\mathcal{E}$ 成立。这个条件较强，一般并不满足。我们只能得到上式对于一切 $A\in\mathcal{R}$ 成立，而 $\mathcal{R}$ 只是一个环。我们知道，一般说来，环 $\mathcal{R}$ 和可测域 $\mathcal{E}$ 可能相差很远。这使测度论工具的使用发生困难。这是一个使我们迷惑了很久而不能前进的问题。后来，我们通过构造一个适当的可测划分，克服了这一困难。建立抽象空间 q 过程唯一性准则时，另一个主要困难是怎样建立柯氏向前方程。原先曾有一种形式。但是我们发现，这种形式与柯氏向后方程并不处于对称地位。我们找到了另一种形式，它就是下面的（F）.

定理（第三章定理 5.1 和定理 5.2）.

对于固定的 $\lambda>0$ 和 $A\in\mathcal{E}$，最小 q 过程 $p^{min}(\lambda,x,A)$ 是相应向后方程

$$(B).\quad p(\lambda,x,A)=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}p(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)}\qquad(x\in E)$$

的最小非负解. 对于固定的 $\lambda>0$ 和 $x\in E$，$p^{min}(\lambda,x,A)$ 是相应向前方程

$$(F).\quad p(\lambda,x,\cdot)=\int p(\lambda,x,dy)\int_{\cdot}\frac{q(y,dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,\cdot)}{\lambda+q(x)}$$

的最小非负解. 此处 $p(\lambda,x,A)$ 表 $p(t,x,A)$ 的拉氏变换（因为一个马氏和它的拉氏变换是1-1对应的，我们也称 $p(\lambda,x,A)$ 为马氏（q 过程））. 换言之，最小 q 过程关于 x 和 A 分别具有函数的最小性和测度的最小性. 因此，最小 q 过程可从 (B)、也可从 (F) 用迭代法得到.

为介绍唯一性准则，还需要几个记号：

$$\mathcal{U}_\lambda=\{\xi\in\mathcal{E}:\ 0\le\xi\le1,\ (\lambda+q(x))\xi(x)=\int q(x,dy)\xi(y),\ \forall x\in E\}$$

$$V_\lambda=\{\eta\in\mathcal{M}:\ \eta(A)=\int\eta(dx)\int_A q(x,dy)(\lambda+q(y))^{-1},\ \forall A\in\mathcal{E}\}$$

可以证明，$\mathcal{U}_\lambda$ 的维数 $\dim\mathcal{U}_\lambda$ 和 $\dim V_\lambda$ 均与 $\lambda>0$ 无关. 我们说流出边界（流入边界）有限，倘若

$\dim \mathcal{U}_\lambda < \infty$ $(\dim V_\lambda < \infty)$.

再记

$$\dot{E} = \{x \in E : f(x) > f(x, E)\}$$

它是非保守点集.

下面是第一章的主要定理.

定理 (第一章, 定理 3.2)

对于给定的全稳定 f 对 $f(x) - f(x, A)$, f 过程唯一的充要条件是下述三条件同时成立:

i). $\inf_{x \in \dot{E}} p^{\min}(\lambda, x, E) > 0$ 对于集 $\dot{E}$ (等价地, 对于每点) $\lambda > 0$ 成立;

ii). $\dim \mathcal{U}_\lambda = 0$;

iii). 或者 f 对保守, 或者 $\dim V_\lambda = 0$.

这个结果当然包含了离散状态空间情形的保民定理. 事实上, 它是全稳定情形的最终解答.

关于含瞬态的 Q 过程, 我们有文 [8].

§2. 可逆(有势)马过程

可逆马尔可夫过程是马程的一个重要分支. 它反映了过程关于时间的对称性，刻划了某种微观可逆性，即所谓"细致平衡". 只有把这类过程搞清楚了，才有可能进一步研究"非平衡态"或当今在物理学领域里十分活跃的"远离平衡态". 例如作者对近关于不可逆性的研究("环流分解的稳定性"，未收入本文)，正是基于关于可逆性工作的基础之上.

作者的多数工作都是关于马程的有势性和可逆性问题的(第二章至第六章).

设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上、取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的马尔可夫过程. 如果对于一切 $0\leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$t_n - t_{n-1} = t_2 - t_1,\ t_{n-1} - t_{n-2} = t_3 - t_2, \cdots$$

和一切 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{E}$，都有

$$P[X_{t_1}\in A_1, \cdots, X_{t_n}\in A_n] = P[X_{t_1}\in A_n, \cdots, X_{t_n}\in A_1]$$

则称 (X_t) 是可逆的. 如果 (X_t) 以 μ 为初分布、以 $P(t,x,A)$ 为转移函数，则 (X_t) 可逆的充要

条件是：

$$\int_A P(t,x,B)\,\mu(dx)=\int_B P(t,x,A)\,\mu(dx)$$

$$\forall A,B\in\mathcal{E},\ \forall t\geqslant 0.$$

这是第三章定理2.5. 这样一来，过程(X_t)的可逆性就归结为上式成立. 此时称$P(t,x,A)$关于μ可逆，而称μ为$P(t,x,A)$的一个可逆测度. 如果将概率测度μ换作σ有限测度μ，则称满足上式的$P(t,x,A)$关于μ是有势的.

如同上节所讲的那样，我们所关心的是如下问题：对于给定的q对$q(x)-q(x,A)$，

i). 是否存在有势q过程？若存在，

ii). 何时唯一？若不唯一，

iii). 如何构造出全部的有势q过程？

当然，我们的工作还是从简单的情形（即E可列）开始的.

最初，钱敏平考虑了最小Q过程的可逆性[34]. 接着，笔者与侯振挺共讨论了生灭过程和单流出过程的有势性及构造问题. 富有基本意义的是关于保守性形的可逆Q过程的存在准则.

详见 [9], [10], [11], [13] 和 [14]. 其中前三篇已收入我们七人合著的书著 [19].

在此基础上，自然就提出了有限流出有势Q过程的研究课题. 一般有限流出Q过程的构造是由 D. Williams[35] (1964) 完成的. 但是，他的构造我们不能用. 其原因是他将流入解改复调整，打乱了有势Q过程（有势Q过程的流入解必须是流出解的对偶）. 另一方面，流入、流出解均固定时，Feller[29] 曾给出了构造. 可惜后来我们发现，他的构造是不完全的. 这样，我们不能从他们的构造中挑选出有势部分. 笔者在 Feller 边界理论的基础上，直接构造出全部有势Q过程. 进一步给出有势、可配称、可逆Q过程的唯一性判准. 使得保守、有限流出有势Q过程的研究得以完成. 这构造了本文的第二章.

这里，仅就不断有势Q过程列举两个结果.

定理 (第二章定理5.1和定理7.1)

设 $Q=(q_{ij})$ 保守、m $(0\in m<+\infty)$ 流出，则不断有势Q过程存在的充要条件是：存在 $(\pi_i>0: i\in E)$

使得

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \quad , \forall i,j \in E$$

且

$$\sum_i \pi_i \overline{X}_\lambda(i) < \infty$$

此处

$$\overline{X}_\lambda(i) = 1 - \lambda \sum_j P_{ij}^{min}(\lambda).$$

今设上述条件满足. 则不断有参 Q 过程 (关于 (π_i)) 唯一的充要条件是下述两条件之一成立:

i) $m \le 1$;

ii) $m \ge 2$, 但对于 X_λ^a $(a = 1, 2, \cdots, m)$ 的任一不交划分

$$\tilde{X}_\lambda^1 = \sum_{l=1}^{n} X_\lambda^{k_l} \quad , 1 \le k_1 < \cdots < k_n \le m, \quad n < m$$

$$\tilde{X}_\lambda^2 = \overline{X}_\lambda - \tilde{X}_\lambda^1$$

定义

$$\tilde{U}_\lambda^{ab} = \lambda (\tilde{X}_\lambda^a)' \Pi \tilde{X}^b \quad , \ a, b = 1, 2$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\lambda \uparrow \tilde{\mathcal{Q}} \quad (\lambda \uparrow \infty), \quad \tilde{\mathcal{Q}}_\lambda \equiv (\tilde{U}_\lambda^{ab})$$

都是 $\tilde{\mathcal{Q}}$ 的一行的元素全是元穷. 此处 Π 是以 (π_i) 为对角元素的对角矩阵. $\overline{X}_\lambda$ 是最大流出解. X_λ^a 和 X^a $(1 \le a \le m)$ 是由 Feller 边界理论所给到的相应于 m 个边界点的流出解及相应的标准映像.

仍然没存在性条件满足. 则由

$$\eta_\lambda^a \equiv (X_\lambda^a)^\vee \Pi \qquad a=1,2,\cdots,m$$

导出 m 个流 λ 算. 命

$$U_\lambda^{ab} = \lambda \eta_\lambda^a X^b, \qquad 1 \le a,b \le m.$$

$$\tau^a = \lambda \eta_\lambda^a X^\circ$$

其中 $X^\circ = 1 - \overline{X}$, 而 $\overline{X}$ 是 $\overline{X}_\lambda$ 的极限映像.

下面是不断有效 Q 过程的构造定理.

定理 (第二章, 定理 3.2)

设 $Q = (q_{ij})$ 保守, $m\ (1 \le m < +\infty)$ 流出基满足存在条件. 任取流出边界的一个不交划分 A, 使得边界点的个数 $|A| \le m$.

选择 $A \times A$ 上的一个随机矩阵 $\mathcal{M} = (M^{ab})$:

$$M^{ab} \ge 0 \quad (a,b \in A), \qquad \sum_b M^{ab} = 1 \quad (a \in A);$$

选择 $A \times A$ 上的一个有限矩阵 $\mathcal{S} = (S^{ab})$, 使

$$+\infty > -S^{ab} \ge \sum_{t \in A} M^{at} U^{tb} \quad (a \ne b) \qquad (*)$$

$$\mathcal{S}\{1\}_A = \mathcal{M}\{\tau_\bullet\}_A$$

$$\mathcal{M}\mathcal{S}' = \mathcal{S}\mathcal{M}'$$

此处约定 $0 \cdot \infty = 0$, $\{u\}_A$ 表以 $u^a\ (a \in A)$ 为分量的列向量. 如果 $\mathcal{U} = (U^{ab})$ 的第 b 列全有限, 则对于这个 b 和一切 a, (*) 式取等号. 最后, 取

$$\mathcal{H}_\lambda = (\mathcal{H} 2l_\lambda + \mathcal{C})^{-1} \mathcal{H}$$

此处 $2l_\lambda = (U_\lambda^{ab})$. 则

$$P_\lambda = P_\lambda^{min} + \{X_\lambda\}_1^m \mathcal{H}_\lambda \{\Xi_\lambda' \Pi\}_1^m$$

是一个不断加有势 Q 过程. 反之，每一个（关于 (π_t) 加）不断加有势 Q 过程可用这种方式得到。

在第三章中，我们研究抽象空间中的可逆马程. 在抽象空间中研究这一课题，这还是第一次. 前面已经提到，在此文中，我们找到了相比向前方程的正确形式. 在保守情形，我们建立了可逆 ξ 过程加以一性状判别和不断可逆 ξ 过程加存在性判别.

定理 (第三章，定理 6.2)

设 ξ 对 $\xi(x) - \xi(x, A)$ 保守. 则可逆 ξ 过程 (进而不断加可逆 ξ 过程) 存在的充要条件都是 ξ 对可逆，即存在概率测度 μ，使得

$$\int_A \xi(x, B)\, \mu(dx) = \int_B \xi(x, A)\, \mu(dx)$$
$$\forall A, B \in \mathcal{E}$$

定理 (第三章，定理 6.3)

设 $f(x)-f(x,A)$ 保号. 则可逆 f 过程生从无区别定义下吸一的充要条件是

i). $f(x)-f(x,A)$ 关于 μ 可逆;

ii). $\lim q_\lambda \neq 0$.

同时成立.

应当指出，第二、三章的结果已由几位作者作了推广. 陈安岳[36]将第二章推广到有限非保号、有限流出性形；胡迪鹤[37]将第三章推广到非时齐性形；郑小谷将第二、三章及[36]的结果推广到抽象空间 (见[38]).

对于有势 f 过程的研究，另一个重要问题是：对于给定的 f 对 (或充分小算子)，

ii). 如何判断它是否有势 (可逆)？为其构造出一切可逆 (对称) 测度？

对于离散状态空间，我们已有完满的解答. 这就是下节所要讨论的内容 (第四章).

§3. 场论

在1979年初，我们建立了抽象场论. 在这篇文章中，我们引进了势场的概念，给出了场成为势场的有力的判准. 对于格子点场，我们给出了最优判准. 我们发现，可逆性本质上是有势性. 因而引进了有势马尔可夫过程（有势 ξ 过程）概念. 我们也研究了一些特殊的 Q 过程的有势性及构造问题.

在研究无穷质点马氏过程时（见第五章），我们又作了必推广. 场论的力量在这里得到充分的显示. 事实上，它是我们后来工作的基本之一（参见下节）.

设 E 为任一非空开集. 给出函数 $a: E\times E\to \overline{\mathbb{R}}$ 满足如下假设

i). 对于一切 $x, \tilde{x}\in E$, $x\neq\tilde{x}$, $0\leq a(x,\tilde{x})<\infty$;

ii). $a(x,\tilde{x})=0 \iff a(\tilde{x},x)=0$. $\forall x, \tilde{x}\in E$.

设 $x, \tilde{x}\in E$, $x\neq\tilde{x}$. 称 x 直达 $\tilde{x}$，记作 $x\longrightarrow\tilde{x}$，如果 $a(x,\tilde{x})>0$；如果存在 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ 使得

$$x\to x^{(1)}\to x^{(2)}\to\cdots\to x^{(n)}\to\tilde{x}$$

则称 x 可达 $\tilde{x}$，通称 $L\equiv(x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}, \tilde{x})$ 为从 x 到 $\tilde{x}$ 的一条路，记作 $x\rightsquigarrow\tilde{x}$.

x 到 $\tilde{x}$ 的一条路. 一切路的全体记作 $\mathcal{L}$.

定义

$$\varphi(x,\tilde{x}) = \log a(\tilde{x},x) - \log a(x,\tilde{x}) \quad , \text{如} \ x \to \tilde{x}$$

$$\varphi(L) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(x^{(k)}, x^{(k+1)}) \quad , \text{为} \ L = (x \equiv x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots \cdots x^{(n)}, x^{(n+1)} \equiv \tilde{x})$$

并记 $\mathcal{G} = \{\varphi(x,\tilde{x}) : x, \tilde{x} \in E\}$. 这里, 如 $x \not\to \tilde{x}$, $\varphi(x,\tilde{x})$ 是不定元.

现在, 我们记 $\mathcal{A} = \{a(x,\tilde{x}) : x, \tilde{x} \in E\}$, 并称 $(E, \mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{G})$ 是一个场. 或简称 $\mathcal{A}$ 是场. 而称 $\varphi(L)$ 为场沿路 L 所作的功.

场 $\mathcal{A}$ 称为势场, 为存在实函数 $V : E \to \mathbb{R}$ 使得

$$\varphi(x,\tilde{x}) = V(\tilde{x}) - V(x) \quad , \quad x \to \tilde{x}.$$

此时称 $V = \{V(x) : x \in E\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的势. 我们知道, 势场最重要的性质是路径无关性:

对于每一个闭路 L, $\varphi(L) = 0$.

注意我们的目标是弱的配称性. 称 $\mathcal{A}$ 弱配称, 如存在函数 $u : E \to \mathbb{R}$, 使得

i). $u(x) > 0$, $\forall x \in E$

ii) $u(x)\, a(x,\tilde{x}) = u(\tilde{x})\, a(\tilde{x},x)$, $\forall x, \tilde{x} \in E$.

此时称 u 为 $\mathcal{A}$ 的配称函数.

下述结果是势论的基本结果.

定理 (第四章, §2). 下述断言等价:

i). $\mathcal{A}$ 是势族;

ii). $\mathcal{A}$ 是路径无关的;

iii). $\mathcal{A}$ 是强可配称的;

iv). 对于每 $l\in D$, $x,\tilde{x}\in E_l$, 恒有

$$\hat{a}(\Delta_l,x)\,a(x,\tilde{x})\,\hat{a}(\tilde{x},\Delta_l)=\hat{a}(\Delta_l,\tilde{x})\,a(\tilde{x},x)\,\hat{a}(x,\Delta_l).$$

如上述之一成立, 则 $\lambda: E\to\mathbb{R}$

$$\lambda(x)=\begin{cases}1, & \text{如 } x=\Delta_l\\ \hat{a}(\Delta_l,x)/\hat{a}(x,\Delta_l), & \text{如 } x\neq\Delta_l\end{cases}\qquad(x\in E_l,\ l\in D)$$

便是一个配称函数, 而 $-\log\lambda$ 是一个势.

我们需要解释一下判据 iv) 中所使用的记号. 等价关系 "$\sim$" 如次:

$x\sim\tilde{x}$ 当且仅当 $x\rightsquigarrow\tilde{x}$ 或 $x=\tilde{x}$.

它显然是一个等价关系. 利用这个等价关系将 E 分成等价类 $\{E_l: l\in D\}$. 对于每 $l\in D$, 任取一参考点 Δ_l; 对于每 $x\in E_l$, 任取一参考路径 $L(\Delta_l,x)\equiv(\Delta_l,x^{(1)},\cdots,x^{(k)},x)$, 并定义

$$\hat{a}(\Delta_l,x)=a(\Delta_l,x^{(1)})\,a(x^{(1)},x^{(2)})\cdots a(x^{(k)},x)$$

$$\hat{a}(x,\Delta_l)=a(x,x^{(k)})\,a(x^{(k)},x^{(k-1)})\cdots a(x^{(1)},\Delta_l).$$

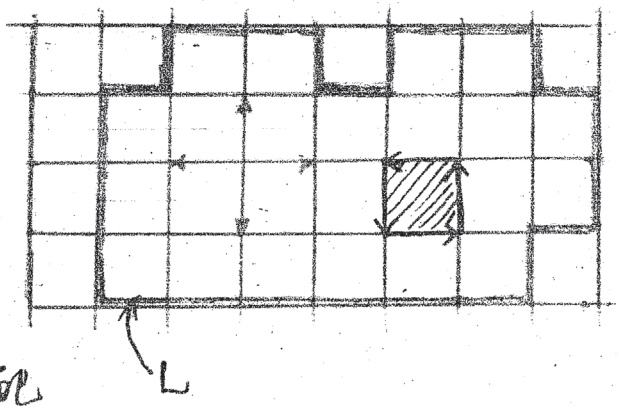
一旦选好了参考点 Δ_ℓ 和参考路 $L_\cdot(\Delta_\ell, x)$，我们将它们固定. 这样，判定 (ii) 告诉我们，为了验证一个势是否是势场，我们并不需要检查一切闭路，而只需检查如下闭路

$$\Delta_\ell \rightsquigarrow x \to \tilde{x} \rightsquigarrow \Delta_\ell .$$

势场之所以有用，是因为它使我们有了良好的直观. 利用上述定理，我们立知生灭 Q 矩阵是有势的，因为它不存在非对流的闭路. 让我们再看看二维格子点模型：

取 $E = \mathbb{Z}^2$，

$a(x,y) > 0 \quad (x \neq y)$ 当且仅当 $\mathrm{dist}(x,y) = 1$.



为使 $\mathcal{A} = (a(x,y))$ 所对应的生灭矩阵 Q 是保守的，充要条件是 $\mathcal{A}$ 沿每一闭路形做和均为零. 其中的 L 是任一闭路. 另一方面，由于不难想象，$\mathcal{A}$ 沿每一闭路形做和均为零等价于 $\mathcal{A}$ 沿每一单位正方形边界形做的均为零. 我们常把后一条件叫做"四边形条件". 这对于一般的有限维格子点模型也是充要的.

§4. 无穷质点马氏过程

无穷质点马氏过程是六十年代末从统计物理抽象出来的一个新的概率论分支. 讨论的对象之一是 Spin-flip 过程. 状态空间是 $E=\{0,1\}^S$, S 为可列集. 赋乘积拓扑使 E 成为紧空间. 物理现象可用速度函数 $c(u,x): S\times E\to \mathbb{R}_+$ 来描述. 通常假定对于每一个 $u\in S$, $c(u,\cdot)\in \mathcal{C}(E)\equiv E$ 上连续函数的全体. 定义算子

$$\Omega f(x)=\sum_{u\in S} c(u,x)\,[f(ux)-f(x)]$$

此处 $ux(v)=x(v)$, 如 $v\neq u$; $=1-x(v)$, 如 $v=u$.

在一定条件下, Ω 唯一决定 $\mathcal{C}(E)$ 上的马氏半群.

如何从概率论的角度研究物理上的细微平衡(或 Gibbs 态)? 对于某些很特殊的速度函数, 国外有些学者证明了 Gibbs 态即是过程(当价比, 半群或其元穷小等于)的可逆测度(参见[30]). 我们的问题是: 对于给定的 $c(u,x)$, 何时测度是完全可逆的(即存在概率测度 μ, 使得

$$\int f(x)\,\Omega g(x)\,\mu(dx)=\int g(x)\,\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

$$\forall\ f,g\in \mathcal{D}(\Omega)\ )?$$

而且可逆时，是否必定有

Gibbs 态 = 可逆测度？

如何构造出一切 Gibbs 态？

我们完满地回答了上述问题.

(第六章, §6. 定理12, 56)

定理. 设 $0<c(u,\cdot)\in C_b(E)$. 则可逆测度集 $\mathcal{R}_S$ 中加元素条件是如下"四边形条件":

$$c(u,x)\,c(v,ux)\,c(u,uvx)\,c(v,vx)$$
$$=c(v,x)\,c(u,vx)\,c(v,vux)\,c(u,ux)$$
$$\forall u,v\in S,\ \forall x\in E$$

成立. 此处 $uvx=vux=v(ux)$. 而且

Gibbs 态 = 可逆测度.

我们还给出了一切 Gibbs 态的构造.

最初，我们对 $c(u,x)$ 施加了"有限程"条件，证明了上述定理（见[15]）. 随后，唐守正排除了这一条件（见[40]）. 我们在第五、六章中用我们的一般方法重新证明了上述结果.

为说明为何加上述四边形条件，定义

$$a(x,\tilde{x})=\begin{cases} c(u,x), & \text{如 } \tilde{x}=ux,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

我们便得到一个速度函数场 $Q_S=(a(x,\tilde{x}):x,\tilde{x}\in E)$,

这实质上也是一个格子点场，只不过是无穷维的罢了。于是，应用上节的场论，便可立即导出此条件。

另一种基本的无穷质点马氏过程是跳宅过程。它的速度函数是 $c(u,v,x)$，无穷小算子是

$$\Omega f(x)=\sum_{u,v\in S} c(u,v,x)\,[\,f((u,v)x)-f(x)\,]$$

此处

$$(u,v)x(w)=\begin{cases} x(v), & w=u \\ x(u), & w=v \\ x(w), & \text{其它} \end{cases}$$

跳宅过程永远是可逆的。因为它有两个平凡的可逆测度：集中于 $\underline{0}\equiv(x(u)=0,\ u\in S)$ 和集中于 $\underline{1}\equiv(x(u)=1,\ u\in S)$ 的测度。因此，我们只关心非平凡的可逆测度，即正测度（在柱集上不为零）。全体正测度之集记作 $\mathcal{R}_e^+$。我们有

定理（第六章，§6. 定理18, 41, 48 和 55）

设 $0<c(u,v,\cdot)\in\mathcal{C}(E)$ $(u,v\in S)$。定义速度函数场 Q_e 为次：

$$a(x,\tilde{x})=\begin{cases} c(u,v,x), & \text{如 } \tilde{x}=(u,v)x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $Q_e=(a(x,\tilde{x}))$ 有势的充要条件是如下"三角

形条件":

$$c(u,v,x)\,c(u,w,(u,v)x)\,c(w,u,(w,u)x)$$
$$= c(u,w,x)\,c(w,v,(u,w)x)\,c(v,u,(v,u)x)$$
$$\forall u,v,w\in S,\ \forall x\in E$$

成立. 当 Qe 有势时,

典型 Gibbs 态 = 可逆测度.

反之, 若 $\mathcal{R}e^{+}\neq\phi$, 则 Qe 有势且

正典型 Gibbs 态 = 正可逆测度.

当 Qe 有势时, 我们也给出了一切典型 Gibbs 态的构造.

为避免太多的概念和记号, 我们在这里只介绍了第三、六章关于这两种特殊模型的两个结果. 事实上, 我们在那里处理了一般模型. 应当指出, 第三、六章所提供的方法具有一般意义. 这可从李世取[41], 李文曲[42]和任平隆[43]等文中看出.

中 国 科 学
1982 年 4 月　　A 辑　　第 4 期

第一章

q 过程的唯一性准则

陈木法　　郑小谷
（北京师范大学）

摘　要

可列状态空间全稳定 q 过程的存在唯一性问题已由侯振挺解决[1]. 本文将侯氏定理推广到任意的抽象状态空间.

q 过程构造论的研究已近半个世纪，可列状态空间的存在唯一性问题经一些人的努力[2-7]，不断取得进展，而由侯振挺获得完满的解答（全稳定情形）[1]. 胡迪鹤考虑了抽象空间 q 过程的构造问题[8-10]，可惜他定义 q 过程的条件较强，不能完全包括可列情形的 Q 过程.

本文提出了抽象空间 q 过程的新定义，这个定义不能再推广. 我们建立了相应的全稳定 q 过程的存在唯一性准则. 这包括了可列情形的侯氏定理.

一、记号和术语

设 $(E, \mathscr{E})$ 为任一抽象可测空间，$\mathscr{E}$ 包含一切单点集 $\{x\}$.

以 $r\mathscr{E}(r\mathscr{E}_+, b\mathscr{E}, b\mathscr{E}_+, \mathscr{E}_+)$ 表有限可测（非负有限可测，有界可测，非负有界可测，非负可测）函数之集；以 $\mathscr{L}(\mathscr{L}_+, \mathscr{L}_+)$ 表有限 σ 可加集函数（有限测度，σ 有限测度）之集.

定义 1.1. 称 $q(x) - q(x, A)$ $(x \in E, A \in \mathscr{E})$ 为 q 函数对，若 $q(\cdot) \in \mathscr{E}_+$，对 A，$q(\cdot, A) \in r\mathscr{E}_+$；对 x，$q(x, \cdot) \in \mathscr{L}_+$，且 $q(x, \{x\}) = 0$，$q(x, E) \leqslant q(x)(\forall x \in E)$. 若

$$q(x) < +\infty, \tag{1.1}$$

则称 x 是稳定点，若 (1.1) 式对一切 $x \in E$ 成立，则称 $q(x) - q(x, A)$ 是全稳定的. 若

$$q(x, E) = q(x), \tag{1.2}$$

则称 x 是保守点；若 (1.2) 式对一切 $x \in E$ 成立，则称 $q(x) - q(x, A)$ 是保守的.

定义 1.2. 给定 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$，称马尔可夫过程 $P(t, x, A)$ $(t \geqslant 0, x \in E, A \in \mathscr{E})$ 为 q 过程，若

$$\lim_{t \to 0^+} (P(t, x, A) - \delta(x, A))t^{-1} = q(x, A) - \delta(x, A)q(x) (x \in E, A \in \mathscr{R}), \tag{1.3}$$

其中 $\delta(x, A) = 1$，如 $x \in A$；$\delta(x, A) = 0$，如 $x \notin A$，而

$$\mathscr{R} = \{A \in \mathscr{E} : \lim_{t \to 0+} \sup_{x \in A} (1 - P(t, x, \{x\})) = 0\}. \tag{1.4}$$

定理 1.1. 设 $(E, \mathscr{E})$ 满足 $\{(x, x) : x \in E\} \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$，则每一个全稳定的马尔可夫过程 $P(t, x, A)$ 都是关于某一 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$ 的 q 过程. 这里全稳定是指

$$\tilde{q}(x) = \lim_{t \to 0+} [1 - P(t, x, \{x\})]t^{-1} < +\infty, \ \forall x \in E.$$

本文 1980 年 12 月 24 日收到.

证. 由文献 [11; 定理 4.1] 知，上面的极限总存在，而且

$$\hat{q}(x, A) \triangleq \lim_{t\to 0^+} P(t, x, A)t^{-1} < +\infty. \quad \forall x \notin A \in \mathscr{R}.$$

文献 [11] 中已证明，若补定义 $\bar{q}(x, A) = \hat{q}(x, A\backslash\{x\})$，则

i) $\mathscr{R}$是一个环.

ii) $\bar{q}(\cdot), \bar{q}(\cdot, A) \in \mathscr{E}_+, \forall A \in \mathscr{R}$.

iii) $\forall x \in E$, $\bar{q}(x, \cdot)$ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度.

iv) 若 $\sup_{x\in A} \bar{q}(x) < \infty$，则 $A \in \mathscr{R}$.

由此可知，存在 $A_n \in \mathscr{R}$，使 $A_n \uparrow E$. 因此，对于每一个 $x \in E$，$\bar{q}(x, \cdot)$ 可唯一扩张为 $\mathscr{E}$ 上的测度，仍记为 $\bar{q}(x, \cdot)$. 易见扩张后的 $\bar{q}(x) - \bar{q}(x, A)$ 是一个 q 函数对，并且对 $\forall x \in E$, $\forall A \in \mathscr{R}$,

$$\lim_{t\to 0+} [P(t, x, A) - \delta(x, A)]t^{-1} = \bar{q}(x, A) - \bar{q}(x)\delta(x, A).$$

引理 1.1. 对任意固定的 $A \in \mathscr{E}$，$\inf_{x\in A} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0$ 对某个 $\lambda_0 > 0$ 成立的充要条件是它对一切 $\lambda > 0$ 成立. 这里 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ $(\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E})$ 是全稳定 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$ 所确定的方程

$$P(\lambda, x, A) = \int \frac{q(x, dy)}{\lambda + q(x)} P(\lambda, y, A) + \frac{\delta(x, A)}{\lambda + q(x)} \qquad (\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E}) \quad (B)$$

的最小非负解.

证. 只需证必要性. 若 $\lambda < \lambda_0$，由 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ 满足预解方程[9, 定理5.1(iii)] 知，对固定的 x, $P^{\min}(\lambda, x, E) \downarrow (\lambda\uparrow)$，故

$$\inf_{x\in A} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) \geqslant \lambda \cdot \lambda_0^{-1} \cdot \inf_{x\in A} \lambda_0 P^{\min}(\lambda_0, x, E) > 0.$$

另一方面，又由 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ 满足预解方程知

$$z_\lambda(x) - z_\mu(x) + (\lambda - \mu)\int P^{\min}(\lambda, x, dy) z_\mu(y) = 0 \qquad (\lambda, \mu > 0, x \in E), \quad (1.5)$$

其中 $z_\lambda(x) \triangleq 1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)$ $(\lambda > 0, x \in E)$，故

$$\lambda P^{\min}(\lambda, x, E) \uparrow (\lambda\uparrow). \quad (1.6)$$

于是当 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 时，更有 $\inf_{x\in A} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0$.

定义 1.3. 给定 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$，称 E 的可测划分 $\{E_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 q 划分，若

$$\sup_{x\in E_n} q(x) < +\infty (\forall n \geqslant 1), \quad (1.7)$$

$$\inf_{x\in E_n} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0 \qquad (\forall n \geqslant 1, \forall \lambda > 0). \quad (1.8)$$

注. 任意固定 $\lambda > 0$. 记

$$E_{m,n}(\lambda) = \{x \in E: n - 1 \leqslant q(x) < n, (m + 1)^{-1} < \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) \leqslant m^{-1}\}(m, n \geqslant 1),$$

则由引理 1.1 知它是 q 划分. 以后我们总假定 q 划分是取定的.

定理 1.2. 设 $q(x) - q(x, A)$ 是全稳定 q 函数对，$\{E_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 q 划分，$P(t, x, A)$ 是马尔可夫过程，则

i) $P(t, x, A)$ 是 q 过程的充要条件是

$$\lim_{t\to 0+}[P(t,x,A)-\delta(x,A)]t^{-1}=q(x,A)-\delta(x,A)q(x)$$
$$(\forall x\in E, A\in\mathscr{E}\cap E_n, n\geqslant 1). \tag{1.9}$$

ii) 若 $q(x)-q(x,A)$ 保守,则 $P(t,x,A)$ 是 q 过程的充要条件是

$$\lim_{t\to 0+}[P(t,x,A)-\delta(x,A)]t^{-1}=q(x,A)-\delta(x,A)q(x)$$
$$(\forall x\in E, A\in\mathscr{E}). \tag{1.10}$$

证. 仿定理 1.1 的证法可得 i),而由文献[11]或由文献 [12; §6.1 定理 2] 的证法可得 ii).

通常,我们把马尔可夫过程 $P(t,x,A)$ 的拉氏变换 $P(\lambda,x,A)$ 也称为马尔可夫过程. 易见

定理 1.3. 马尔可夫过程 $P(\lambda,x,A)$ 为 q 过程的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\lambda P(\lambda,x,A)-\delta(x,A)]=q(x,A)-\delta(x,A)q(x)$$
$$(\forall x\in E, A\in\mathscr{E}\cap E_n, n\geqslant 1). \tag{1.11}$$

二、一些引理

以后恒假定 $q(x)-q(x,A)$ 全稳定.

定义 2.1. 称马尔可夫过程 $P(\lambda,x,A)$ 满足 (2.1) 或 (2.2),它分别为:

$$\int[(\lambda+q(x))\delta(x,dy)-q(x,dy)]P(\lambda,y,A)=\delta(x,A)$$
$$(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}\cap E_n), \tag{2.1}$$

$$\int P(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,A)-q(y,A)]=\delta(x,A)$$
$$(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}\cap E_n). \tag{2.2}$$

命题 2.1. (B) 成立等价于对一切 n, (2.1) 式成立;而 (2.2) 式对一切 n 成立等价于

$$P(\lambda,x,A)=\int P(\lambda,x,dy)\int_A q(y,dz)(\lambda+q(z))^{-1}+\delta(x,A)(\lambda+q(x))^{-1}$$
$$(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}) \tag{F}$$

成立.

证. 只证 (2.2) 式对一切 n 成立等价于 (F) 式成立. 前者等价于

$$\int_A P(\lambda,x,dy)(\lambda+q(y))=\int P(\lambda,x,dy)q(y,A)+\delta(x,A)$$
$$(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}), \tag{2.3}$$

两边视作关于 A 的测度,并对 $(\lambda+q(x))^{-1}\delta(x,A)$ 积分得 (F) 式;若 (F) 式成立,两边视作关于 A 的测度并对 $(\lambda+q(x))\delta(x,A)$ 积分得 (2.3) 式. 命题 2.1 证毕.

由文献 [9; 定理 3.1] 和文献 [13; 定理 5.2] 得

命题 2.2. $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 满足 (B) 和 (F). 记

$$\mathscr{U}_\lambda=\left\{f\in b\mathscr{E}_+:(\lambda+q(\cdot))f(\cdot)=\int q(\cdot,dy)f(y)\right\},$$

$$\mathscr{V}_\lambda=\left\{\varphi\in\mathscr{L}_+:\varphi(\cdot)=\int\varphi(dx)\int_\cdot q(x,dy)(\lambda+q(y))^{-1}\right\},$$

$$\mathscr{V}'_\lambda=\Big\{\varphi\in\mathscr{L}_+:\int\varphi(dx)[(\lambda+q(x))\,\delta(x,A)-q(x,A)]=0,\quad\forall A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ \forall n\geqslant 1\Big\}. \tag{2.4}$$

$$R(\lambda,\mu,x,A)=\delta(x,A)+(\lambda-\mu)P^{\min}(\mu,x,A)\quad(\lambda,\mu>0,x\in E,A\in\mathscr{E}).$$

定义 2.2. 称 $f_\lambda\in b\mathscr{E}_+(\lambda>0)$ 为(函数)协调族，若

$$f_\lambda(\cdot)=\int R(\mu,\lambda,\cdot,dy)f_\mu(y)\quad(\lambda,\mu>0);$$

称 $\varphi_\lambda\in\mathscr{L}_+(\lambda>0)$ 为(测度)协调族，若

$$\varphi_\lambda(\cdot)=\int\varphi_\mu(dx)R(\mu,\lambda,x,\cdot)\quad(\lambda,\mu>0).$$

由文献 [9; 命题 6.2]，并由类似于命题 2.1 和文献 [9; 命题 6.5] 的证法，得

命题 2.3. i) 对任一固定的 $\lambda_0>0$，及 $f_{\lambda_0}\in\mathscr{U}_{\lambda_0}$，若

$$f_\mu(\cdot)\triangleq\int R(\lambda_0,\mu,\cdot,dy)f_{\lambda_0}(y)\quad(\mu>0),$$

则 $f_\mu\in\mathscr{U}_\mu$，且 $f_\lambda(\lambda>0)$ 是协调族.

ii) $\mathscr{V}_\lambda=\mathscr{V}'_\lambda$. 对任一固定 $\lambda_0>0$ 及 $\varphi_{\lambda_0}\in\mathscr{V}_{\lambda_0}$，若

$$\varphi_\mu(\cdot)\triangleq\int\varphi_{\lambda_0}(dx)R(\lambda_0,\mu,x,\cdot)\quad(\mu>0),$$

则 $\varphi_\mu\in\mathscr{V}_\mu$ 且 $\varphi_\lambda(\lambda>0)$ 是协调族.

iii) $\mathscr{U}_\lambda$，$\mathscr{V}_\lambda$ 的维数与 $\lambda>0$ 无关，分别记为 $\dim\mathscr{U}$ 和 $\dim\mathscr{V}$.

引理 2.1 (分解引理). $\eta_\lambda(\lambda>0)$ 是测度协调族的充要条件是存在 $\omega\in\mathscr{L}_+$，使

$$\int\omega(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{L}_+, \tag{2.5}$$

和存在协调族 $\bar{\eta}_\lambda\in\mathscr{V}_\lambda\ (\lambda>0)$，使

$$\eta_\lambda(\cdot)=\int\omega(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)+\bar{\eta}_\lambda(\cdot), \tag{2.6}$$

且 ω 和 $\bar{\eta}_\lambda\ (\lambda>0)$ 是唯一的.

证. 充分性显然. 现证必要性. 设 η_λ 是协调族，则

$$\eta_\nu(A)+(\nu-\lambda)\int\eta_\nu(dx)P^{\min}(\lambda,x,A)=\eta_\lambda(A)\geqslant 0,$$

从而

$$\nu\eta_\nu(A)\geqslant(1-\lambda^{-1}\nu)\int\eta_\nu(dx)\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)-\delta(x,A)].$$

由文献 [11; 定理 4.1] 知 $P^{\min}(t,x,\{x\})\geqslant\exp\{-q(x)t\}$，由此推得 $\lambda[1-\lambda P^{\min}(\lambda,x,\{x\})]\leqslant q(x)(\lambda>0,x\in E)$. 固定 ν，并令 $\lambda\to\infty$，则 $\forall A\in\mathscr{E}\cap E_n\ (n\geqslant 1)$，有

$$\nu\eta_\nu(A)\geqslant\varlimsup_{\lambda\to\infty}(1-\lambda^{-1}\nu)\int_{E-A}\eta_\nu(dx)\lambda^2P^{\min}(\lambda,x,A)$$

$$+\varlimsup_{\lambda\to\infty}(1-\lambda^{-1}\nu)\int_A\eta_\nu(dx)\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda,x,A)-1]$$

$$\geqslant \int \eta_\nu(dx)[q(x, A) - \delta(x, A)q(x)].$$

命
$$\omega_\nu(A) = \nu\eta_\nu(A) - \int \eta_\nu(dx)[q(x, A) - \delta(x, A)q(x)]$$
$$(A \in \mathscr{E} \cap E_n,\ n \geqslant 1), \tag{2.7}$$

则
$$0 \leqslant \omega_\nu(A) < +\infty \quad (\forall A \in \mathscr{E} \cap E_n,\ n \geqslant 1). \tag{2.8}$$

ω_ν 可唯一扩张为 $\omega_\nu \in \mathscr{L}_+$, 现证

$$\int \omega_\nu(dx)P^{(n)}(\nu, x, A) \leqslant \eta_\nu(A) \quad (\forall A \in \mathscr{E},\ n \geqslant 0). \tag{2.9}$$

这里 $P^{(0)}(\lambda, x, A) = 0$, $P^{(n+1)}(\lambda, x, A) = \int P^{(n)}(\lambda, x, dy) \cdot \int_A q(y, dz)\ (\lambda + q(z))^{-1} + \delta(x, A)(\lambda + q(x))^{-1}$ $(n \geqslant 0)$. 当 $n = 0$ 时, (2.9) 式平凡. 今设它对 n 成立,则由 (2.7) 和 (2.8) 式知,当 $A \in \mathscr{E} \cap E_m$ 时, $0 \leqslant \int \eta_\nu(dx)q(x, A) < +\infty$, 从而 $0 \leqslant \int \eta_\nu(dy) \int_A q(y, dz)(\nu + q(z))^{-1} < +\infty$, 于是

$$\int \omega_\nu(dx)P^{(n+1)}(\nu, x, A) = \int \omega_\nu(dx)\left[\int P^{(n)}(\nu, x, dy)\int_A \frac{q(y, dz)}{\nu + q(z)} + \frac{\delta(x, A)}{\nu + q(x)}\right]$$
$$\leqslant \int \eta_\nu(dy)\int_A \frac{q(y, dz)}{\nu + q(z)} + \int_A \frac{\omega_\nu(dx)}{\nu + q(x)} = \eta_\nu(A),$$
$$A \in \mathscr{E} \cap E_m,\ m \geqslant 1.$$

这证明 (2.9) 式成立. 在 (2.9) 式中,令 $n \to \infty$, 由文献 [13, 定理 4.2 和引理 4.1] 及单调收敛定理得

$$\eta_\nu(A) \geqslant \int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A) \quad (A \in \mathscr{E}). \tag{2.10}$$

再命
$$\bar{\eta}_\nu(A) = \eta_\nu(A) - \int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A) \quad (A \in \mathscr{E}), \tag{2.11}$$

由 (2.7) 式及 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ 满足向后方程 (B) 知, $\forall A \in \mathscr{E} \cap E_n$, $n \geqslant 1$,

$$\int \bar{\eta}_\nu(dx)[(\nu + q(x))\delta(x, A) - q(x, A)]$$
$$= \omega_\nu(A) - \int \omega_\nu(dx)\int P^{\min}(\nu, x, dy)[(\nu + q(y))\delta(y, A) - q(y, A)]$$
$$= \omega_\nu(A) - \omega_\nu(A) = 0,$$

即 $\bar{\eta}_\nu \in \mathscr{V}_\nu$. 现证 ω_ν 和 $\bar{\eta}_\nu$ 由 η_ν 唯一决定. 若 ω'_ν 和 $\bar{\eta}'_\nu$ 也满足 (2.11) 式,则

$$\int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A) + \bar{\eta}_\nu(A) = \int \omega'_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A) + \bar{\eta}'_\nu(A)(\forall A \in \mathscr{E}),$$

两边视作关于 A 的测度, 并对 $[(\nu + q(x))\delta(x, A) - q(x, A)]$ $(A \in \mathscr{E} \cap E_n)$ 取积分, 由 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ 满足 (2.2) 式及 $\bar{\eta}_\nu, \bar{\eta}'_\nu \in \mathscr{V}_\nu$ 可知,

$$\omega_\nu(A) = \omega'_\nu(A) \quad (\forall A \in \mathscr{E}).$$

从而我们证明了: 对于任意固定的 $\nu > 0$, $\omega_\nu(A)$ 分解唯一. 又

$$\eta_\lambda(A) = \int \eta_\nu(dx)R(\nu, \lambda, x, A)$$

$$= \int \omega_\nu(dx)\int P^{\min}(\nu, x, dy)R(\nu, \lambda, y, A) + \int \bar{\eta}_\nu(dx)R(\nu, \lambda, x, A)$$

$$= \int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A) + \int \bar{\eta}_\nu(dx)R(\nu, \lambda, x, A). \tag{2.12}$$

显然 $\int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot) \in \mathscr{L}_+$，且由命题 2.3 的 ii) 知，$\int \bar{\eta}_\nu(dx)R(\nu, \lambda, x, \cdot) \in \mathscr{Y}_\lambda (\lambda > 0)$. 由 ω_λ 与 $\bar{\eta}_\lambda$ 的唯一性知，ω_λ 与 λ 无关，记作 ω. 进而 $\bar{\eta}_\lambda (\lambda > 0)$ 是协调族.

引理 2.2. 若 $\eta_\lambda (\lambda > 0)$ 是测度协调族，则

$$\eta_\lambda \downarrow 0 \quad (\lambda \uparrow \infty), \tag{2.13}$$

若还有 $\eta_\lambda \in \mathscr{Y}_\lambda$ $(\lambda > 0)$，则

$$\lambda\eta_\lambda(A) - \nu\eta_\nu(A) = (\lambda - \nu)\int \eta_\lambda(dx)[\delta(x, A) - \nu P^{\min}(\nu, x, A)]$$

$$= (\lambda - \nu)\int \eta_\nu(dx)[\delta(x, A) - \lambda P^{\min}(\lambda, x, A)]$$

$$(\lambda, \nu > 0, A \in \mathscr{E}). \tag{2.14}$$

证. 由协调性

$$\eta_\lambda(A) = \eta_\nu(A) + (\nu - \lambda)\int \eta_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A)$$

$$= \eta_\nu(A) + \nu\int \eta_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A) - \int \eta_\nu(dx)\lambda P^{\min}(\lambda, x, A).$$

由此可见 (2.13) 式. 若还有 $\eta_\lambda \in \mathscr{Y}_\lambda$，则由 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ 满足 (2.2) 式 $(n \geqslant 1)$ 知

$$\lambda\eta_\lambda(A) - \nu\eta_\nu(A)$$

$$= \sum_n [\lambda\eta_\lambda(A \cap E_n) - \nu\eta_\nu(A \cap E_n)]$$

$$= \sum_n \Big\{ \int \eta_\lambda(dx)[q(x, A \cap E_n) - q(x)\delta(x, A \cap E_n)]$$

$$- \int \eta_\nu(dx)[q(x, A \cap E_n) - q(x)\delta(x, A \cap E_n)]\Big\}$$

$$= \sum_n (\nu - \lambda)\int \eta_\lambda(dx)\int P^{\min}(\nu, x, dy)[q(y, A \cap E_n) - q(y)\delta(y, A \cap E_n)]$$

$$= (\nu - \lambda)\sum_n \int \eta_\lambda(dx)[\nu P^{\min}(\nu, x, A \cap E_n) - \delta(x, A \cap E_n)]$$

$$= (\lambda - \nu)\int \eta_\lambda(dx)[\delta(x, A) - \nu P^{\min}(\nu, x, A)].$$

再由 λ 和 ν 的对称性即得所要证的. 引理 2.2 证毕.

引理 2.3. 设 $\eta_\lambda (\lambda > 0)$ 是测度的协调族. 如引理 2.1，记

$$\eta_\lambda(\cdot) = \int \omega(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot) + \bar{\eta}_\lambda(\cdot) \quad (\lambda > 0), \tag{2.15}$$

则

$$P(\lambda, x, A) = P^{\min}(\lambda, x, A) + [1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)](c + \lambda\eta_\lambda(E))^{-1}\eta_\lambda(A)$$

$$(\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E},\ c \geqslant 0,\ \text{但 } c + \lambda\eta_\lambda(E) > 0) \tag{2.16}$$

是马尔可夫过程. 它是 q 过程的充要条件是

i) $q(x)-q(x,A)$ 保守. ii) $\omega=0$. iii) $\omega(E)=+\infty$. iv) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)=+\infty$ 之一成立.

证. 为证 (2.16) 式所定义的 $P(\lambda,x,A)$ 满足预解方程,只需证

$$\sigma_\lambda\eta_\lambda(A)-\sigma_\mu\eta_\mu(A)+(\lambda-\mu)\int\sigma_\lambda\eta_\lambda(dx)P(\mu,x,A)=0,$$

其中 $\sigma_\lambda=(c+\lambda\eta_\lambda(E))^{-1}$ $(\lambda>0)$. 由 $\eta_\lambda(\lambda>0)$ 的协调性,只需

$$\sigma_\lambda-\sigma_\mu+(\lambda-\mu)\sigma_\lambda\sigma_\mu\int\eta_\lambda(dx)[1-\mu P^{\min}(\mu,x,E)]=0,$$

但由 $\sigma_\lambda[1+\lambda\sigma_\mu\eta_\lambda(E)]=\sigma_\lambda\sigma_\mu[c+\lambda\eta_\lambda(E)+\mu\eta_\mu(E)]$ 关于 λ,μ 对称,易见上式成立.

由定理 1.3 及 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 是 q 过程知, (2.16) 式所定义的 $P(\lambda,x,A)$ 为 q 过程的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2[1-\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)](c+\lambda\eta_\lambda(E))^{-1}\eta_\lambda(A)=0$$
$$(x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1). \tag{2.17}$$

由文献 [9; 定理 3.1(6)] 我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[1-\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)]=q(x)-q(x,E)\ (\forall x\in E), \tag{2.18}$$

$\forall A\in\mathscr{E}\cap E_n$, $n\geqslant 1$, 固定 ν_0, $\exists N=N(\nu_0)$, 使

$$\sum_{m=N+1}^{\infty}\int_{E_m}\eta_{\nu_0}(dx)q(x,A)<\varepsilon.$$

于是由引理 2.2 知,当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时,有

$$\int\eta_\nu(dx)\,q(x,A)\leqslant\sum_{m=1}^{N}\int_{E_m}\eta_\nu(dx)\,q(x,A)+\varepsilon.$$

由此及文献 [12; 附篇引理 11] 知,

$$\nu\eta_\nu(A)=\omega(A)+\int\eta_\nu(dx)[q(x,A)-q(x)\delta(x,A)]\xrightarrow[\nu\to\infty]{}\omega(A). \tag{2.19}$$

由 (1.6) 式,单调收敛定理及 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 的标准性有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\omega(dx)\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)=\omega(E).$$

由此及引理 2.2 和 (2.15) 式,得到

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_\lambda(E)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)+\omega(E). \tag{2.20}$$

若 $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)+\omega(E)=0$, 则 $\omega=\bar{\eta}_\lambda=0$, 从而 $\eta_\lambda=0$ $(\lambda>0)$, 即 $P(\lambda,x,A)\equiv P^{\min}(\lambda,x,A)$. 引理平凡. 故不妨设 $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)+\omega(E)>0$. 由 (2.18)—(2.20) 式得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2[1-\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)](c+\lambda\eta_\lambda(E))^{-1}\eta_\lambda(A)$$
$$=[q(x)-q(x,E)]\omega(A)[c+\omega(E)+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)]^{-1}$$
$$(x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1), \tag{2.21}$$

于是由 (2.17) 式知它是 q 过程等价于引理 2.3 的 i)—iv) 之一成立.

引理 2.4. 存在 $\lambda>0$, 使

$$c(\lambda) \triangleq \inf_{x\in E} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) = 0 \tag{2.22}$$

的充要条件是：存在 $\omega \in \mathscr{L}_+$，使 $\omega(E_n) < +\infty (\forall n \geqslant 1)$，$\omega(E) = +\infty$ 且

$$\int \omega(dx) P^{\min}(\lambda, x, E) < +\infty \quad (\forall \lambda > 0).$$

证．充分性由

$$\int \omega(dx) P^{\min}(\lambda, x, E) \geqslant \lambda^{-1} c(\lambda) \omega(E)$$

可见．现证必要性．设 (2.22) 式成立．则存在自然数集 N 的一个无穷子集 $\hat{N}$，使 $\sum_{n\in\hat{N}} \inf_{x\in E_n} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) < +\infty$，还可取 $x_n \in E_n (n \in \hat{N})$，使 $\sum_{n\in\hat{N}} \lambda P^{\min}(\lambda, x_n, E) < +\infty$．任取 $x_n \in E_n$ $(n \in N - \hat{N})$，并置 $\omega(\{x_n\}) = 1$，如 $n \in \hat{N}$；$\omega(\{x_n\}) = 0$，如 $n \in N - \hat{N}$．$\omega(A) \triangleq \sum_{n\in N} \omega(A \cap \{x_n\})$，$A \in \mathscr{E}$．则 $\omega(E_n) = \omega(\{x_n\}) \leqslant 1$，$\omega(E) = \sum_n \omega(\{x_n\}) = +\infty$，而

$$\int \omega(dx) \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) = \sum_{n\in\hat{N}} \lambda P^{\min}(\lambda, x_n, E) < +\infty.$$

引理 2.4 证毕．

由文献 [14] 中的典型方法，我们不难证明

引理 2.5. 设对 $A \in \mathscr{E}$，$U(\cdot, A)$，$T(\cdot, A)$，$P(\cdot, A)$，$Q(\cdot, A) \in \mathscr{E}_+$；对 $x \in E$，$U(x, \cdot)$，$T(x, \cdot)$，$P(x, \cdot)$，$Q(x, \cdot) \in \mathscr{L}_+$．

i) 若对 A，$P(\cdot, A)$ 是方程

$$f(\cdot) = \int U(\cdot, dy) f(y) + T(\cdot, A)$$

的最小非负解，则 $\forall g \in b\mathscr{E}_+$，$\int P(\cdot, dy) g(y)$ 是方程

$$f(\cdot) = \int U(\cdot, dy) f(y) + \int T(\cdot, dy)\, g(y)$$

的最小非负解．

ii) 若对 $x \in E$，$Q(x, \cdot)$ 是方程

$$\varphi(\cdot) = \int \varphi(dy) U(y, \cdot) + T(x, \cdot)$$

的最小非负解，则 $\forall U \in \mathscr{L}_+$，$\int U(dx) Q(x, \cdot)$ 是方程

$$\varphi(\cdot) = \int \varphi(dy) U(y, \cdot) + \int U(dy) T(y, \cdot)$$

的最小非负解．

引理 2.6. i) 若 $f \in b\mathscr{E}_+$，且

$$\int [(\lambda + q(\cdot))\delta(\cdot, dy) - q(\cdot, dy)] f(y) = g(\cdot) \geqslant 0,$$

则 $f(\cdot) \geqslant \int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy) g(y)$．若还有 $\dim \mathscr{U} = 0$，则

$$f(\cdot) = \int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy) g(y).$$

ii) 若 $\mu\in\mathscr{L}_+$，且

$$\int\mu(dx)[(\lambda+q(x))\delta(x,A)-q(x,A)]=U(A)\geqslant 0\quad(A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1),\tag{2.23}$$

则

$$\mu(\cdot)\geqslant\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot).\tag{2.24}$$

若还有 $\dim\mathscr{Y}=0$，则

$$\mu(\cdot)=\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot).\tag{2.25}$$

证．只证 ii)，i) 的证明类似．由命题 2.1 的证法，μ 是方程

$$\varphi(\cdot)=\int\varphi(dx)\int_{\cdot}q(x,dy)[\lambda+q(y)]^{-1}+\int_{\cdot}U(dx)[\lambda+q(x)]^{-1}\tag{2.26}$$

的解．但由 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 是方程 (F) 的最小非负解及引理 2.5 的 ii)，$\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)$ 是 (2.26) 式的最小非负解，故 (2.24) 式成立．又显然有

$$\mu(\cdot)-\int U(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)\in\mathscr{Y}_\lambda\quad(\lambda>0).$$

故若 $\dim\mathscr{Y}=0$，则 (2.25) 式成立．引理 2.6 证毕．

引理 2.7. 若存在 $\lambda>0$，使 $\inf\limits_{x\in E}\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)>0$，则 $\dim\mathscr{U}=0$．

证．由文献 [14; 定理 5] 即可得．

引理 2.8.

i) 若 $f\in r\mathscr{E}$ 满足

$$\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)f(y)=0,\tag{2.27}$$

则 $f=0$．

ii) 若 $\mu\in\mathscr{L}$ 满足

$$\int\mu(dx)P^{\min}(\lambda,x,A)=0\quad(A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1),\tag{2.28}$$

则 $\mu=0$．

证．i) 由 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 满足向后方程 (B) 及 (2.27) 式得

$$f(\cdot)=\int\delta(\cdot,dy)f(y)=[\lambda+q(\cdot)]\int P^{\min}(\lambda,\cdot,dy)f(y)$$
$$-\int q(\cdot,dy)\int P^{\min}(\lambda,y,dz)f(z)=0.$$

ii) 由 (2.28) 式，我们有

$$\int\mu(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot)=\sum_n\int\mu(dx)P^{\min}(\lambda,x,\cdot\cap E_n)=0,$$

于是，由 $P^{\min}(\lambda,x,A)$ 满足 (F) 式，则

$$\mu(A)=\sum_n\int_{E_n\cap A}\mu(dx)$$
$$=\sum_n\left\{\int\mu(dx)\int P^{\min}(\lambda,x,dy)[(\lambda+q(y))\delta(y,A\cap E_n)\right.$$

$$-q(y, A\cap E_n)]\Big\} = 0.\quad A\in\mathscr{E}.$$

引理 2.8 证毕

引理 2.9. 设对 $A\in\mathscr{E}$，$G(\cdot,A)\in b\mathscr{E}_+$，对 $x\in E$，$G(x,\cdot)\in\mathscr{L}_+$，$0\leqslant G(\cdot,\cdot)\leqslant 1$；$g\in b\mathscr{E}_+$；$f^*$ 是方程

$$f(\cdot) = \int G(\cdot,dy)f(y) + g(\cdot)$$

的最小非负解．令

$$D = \{x:\ g(x) > 0\},\tag{2.29}$$

则

$$\sup_{x\in E} f^*(x) = \sup_{y\in D} f^*(y).\tag{2.30}$$

证．令 $f^{(1)}(x) = g(x)(x\in E)$，$f^{(n+1)}(x) = \int G(x,dy)f^{(n)}(y) + g(x)(x\in E, n\geqslant 1)$．由(2.29)式知 $f^{(1)}(x)\leqslant \sup_{y\in D} f^{(1)}(y)\leqslant \sup_{y\in D} f^*(y)$．若对 $n\geqslant 1$ 有 $f^{(n)}(x)\leqslant \sup_{y\in D} f^*(y)$，则 $\forall x\in E-D$，

$$f^{(n+1)}(x) = \int G(x,dy)f^{(n)}(y) + g(x) = \int G(x,dy)f^{(n)}(y)$$
$$\leqslant \sup_{y\in D} f^*(y)G(x,E)\leqslant \sup_{y\in D} f^*(y).$$

令 $n\to\infty$ 得 $f^*(x)\leqslant \sup_{y\in D} f^*(y)\ (\forall x\in E)$．左边对 x 在 E 上取上确界知 (2.30) 式成立．

引理 2.10. 若 $\dim\mathscr{U} = 0$，则

$$\inf_{x\in E}\lambda P^{\min}(\lambda, x, E) = \inf_{x\in \dot{E}}\lambda P^{\min}(\lambda, x, E),\tag{2.31}$$

此处，$\dot{E} = \{x:\ q(x,E) < q(x)\}$．

证．由文献 [14; 定理 9] 知，$\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)$ 是方程

$$f(\cdot) = \int \frac{q(\cdot,dy)}{\lambda + q(\cdot)}f(y) + \frac{\lambda}{\lambda + q(\cdot)}$$

的最小非负解．从而 $1-\lambda P^{\min}(\lambda,\cdot,E)$ 是方程

$$f(\cdot) = \int\frac{q(\cdot,dy)}{\lambda + q(\cdot)}f(y) + \frac{q(\cdot) - q(\cdot,E)}{\lambda + q(\cdot)}$$

的最大解．再由 $\dim\mathscr{U} = 0$ 知，它也是此方程的最小非负解．于是由引理 2.9，我们有

$$\sup_{x\in E}[1-\lambda P^{\min}(\lambda, x, E)] = \sup_{x\in\dot{E}}[1-\lambda P^{\min}(\lambda, x, E)],$$

由此得 (2.31) 式．

引理 2.11. 每一个 q 过程 $P(\lambda, x, A)$ 满足

$$\lambda P(\lambda, x, A)\geqslant \int P(\lambda, x, dy)[q(y, A) - q(y)\delta(y, A)] + \delta(x, A)$$
$$(\lambda > 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}\cap E_n,\ n\geqslant 1).\tag{2.32}$$

证．由预解方程出发，仿引理 2.1 证明的前一部分(到 (2.7) 式之前)，易得．

命题 2.4. 满足向前方程 (F) 的 q 过程唯一的充要条件是最小 q 过程 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ 不断或 $\dim\mathscr{Y} = 0$．

证．充分性显然．现证必要性．设最小 q 过程中断，且 $\dim\mathscr{Y}\neq 0$．固定 $\lambda_0 > 0$，取 $0\neq \eta_{\lambda_0}\in\mathscr{Y}_{\lambda_0}$，并置 $\bar{\eta}_\lambda(\cdot) = \int\eta_{\lambda_0}(dx)R(\lambda_0,\lambda,x,\cdot)$，$\lambda > 0$．则由命题 2.3 的 ii) 知，$\bar{\eta}_\lambda(\lambda > 0)$

是协调族，且 $\bar{\eta}_\lambda \in \mathscr{Y}_\lambda(\lambda > 0)$. 用此处的 $\bar{\eta}_\lambda$ 代替 (2.16) 式中的 η_λ，便得到一个异于 $P^{\min}(\lambda, x, A)$的满足 (F) 的 q 过程. 这与所设满足 (F) 的 q 过程唯一产生矛盾.

三、主要定理的证明

定理 3.1. 设 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$ 全稳定，则 q 过程存在唯一的充要条件是

i) $c(\lambda) \triangleq \inf\limits_{x \in E} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0 \quad (\exists \lambda > 0)$, (3.1)

ii) 满足 (F) 的 q 过程唯一

同时成立.

证. 必要性. 如 (3.1) 式不成立，则如引理 2.4 取 ω，于是由引理 2.3 知，由 (2.16) 式定义了一个不断的 q 过程. 但 (3.1) 式不成立导致 $P^{\min}(\lambda, x, A)$ 中断. 故 q 过程非唯一.

充分性. 有了前面一节的准备之后，充分性的证明已经不太困难了，基本思路可从文献 [15] 中找到.

由引理 2.10 和引理 2.7，命题 2.4 和文献 [8, §4] 又得

定理 3.2. 设 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$ 全稳定. 则 q 过程存在唯一的充要条件是下述之条件同时成立:

i) $\inf\limits_{x \in E} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0 \quad (\lambda > 0)$,

ii) $\dim \mathscr{U} = 0$,

iii) $q(x) - q(x, A)$ 保守，或它虽非保守但 $\dim \mathscr{Y} = 0$.

由此易证.

定理 3.3. 若全稳定 q 函数对有界，则 q 过程唯一.

本文是在严士健和侯振挺老师指导下完成的，谨致谢意.

参 考 文 献

[1] 侯振挺，中国科学，1974，2:115—130.
[2] Feller, W., *TAMS*, 48 (1940), 488—515; *ibid*, 58(1945), 474.
[3] ————, *Ann. of Math.*, II. Ser., 65(1957), 527—570.
[4] Doob, J. L., *TAMS*, 58(1945), 455—473.
[5] Reuter, G. E. H., *Acta. Math.*, 97(1957), 1—46.
[6] ————, *J. London. Math. Soc.*, 34(1959), 81—91.
[7] ————, *J. London Math. Soc.*, 37(1962), 63—73.
[8] 胡迪鹤，数学学报，16(1966)，2:150—165.
[9] ———，武汉大学学报，1978，4:1—18; 1979，1:15—38.
[10] ———. 数学学报，23(1980)，5:250—757.
[11] Kendall, D. G., *TAMS*, 78(1955), 2: 529—540.
[12] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.
[13] 陈木法，数学年刊，1(1980)，3—4: 437—451.
[14] ———，北京师范大学学报，1979，3:66—73.
[15] Reuter, G. E. H., *Z. Wahr.*, 33(1976), 309—315.

UNIQUENESS CRITERION FOR q-PROCESSES

CHEN MUFA (陈木法) AND ZHENG XIAOGU (郑小谷)
(*Beijing Normal University*)

Received December 24, 1980.

ABSTRACT

The uniqueness problem for the totally stable q-processes in the case of the state spaces being countable was solved by C. T. Hou. In this paper, we shall extend Hou's theorem to arbitrary abstract state spaces.

The construction of q-processes has been studied for about half a century. When the state spaces were countable, the existence and uniqueness problem was being successively improved by W.Feller[14,15], J. L. Doob[16], G. E. H. Reuter[2,3,4] and others. Finally, C. T. Hou fully solved the case of all states being stable. When the state spaces were abstract, the problem was studied by D. H. Hu[6,7,11], but his definition of q-processes did not fully include Q-processes of countable state spaces. In this paper, a new definition of q-processes is presented, and it can not be extended further. We have obtained a uniqueness criterion for q-processes, which includes Hou's uniqueness theorem.

I NOTATION

Let (E, ε) be an abstract measurable space. And all singletons $\{x\}$ $(x \in E)$ belong to ε. $r\mathscr{E}$ $(r\mathscr{E}_+, b\mathscr{E}, b\mathscr{E}_+, \mathscr{E}_+)$ denotes the set of all finite measurable (nonnegative finite measurable, bounded measurable, nonnegative bounded measurable, nonnegative measurable) functions; $\mathscr{L}(\mathscr{L}_+, \overline{\mathscr{L}}_+)$ denotes the set of all finite σ-additive set functions (finite measures, σ-finite measures).

Definition 1.1. The functions $q(x) - q(x, A)(x \in E, A \in \mathscr{E})$ are called a q-pair, if $q(\cdot) \in \mathscr{E}_+, q(\cdot, A) \in r\mathscr{E}_+$ for $A; q(x, \cdot) \in \mathscr{L}_+$ for $x, q(x, \{x\}) = 0$ and $q(x, E) \leqslant q(x)$ for every $x \in E$. We call x stable if

$$q(x) < +\infty, \tag{1.1}$$

and we call $q(x) - q(x, A)$ totally stable if (1.1) holds for every $x \in E$. x is called a conservative point if

$$q(x, E) = q(x), \tag{1.2}$$

and $q(x) - q(x, A)$ conservative if (1.2) holds for every $x \in E$.

Definition 1.2. Given a q-pair $q(x) - q(x, A)$, a Markov process $P(t, x, A)$ $(t \geqslant 0, x \in E, A \in \mathscr{E})$ [6; Definition 1.1] is called a q-process if

$$\lim_{t\to 0+}[P(t,x,A)-\delta(x,A)]\cdot t^{-1}=q(x,A)-\delta(x,A)q(x)$$

$$(x\in E, A\in\mathscr{R}), \tag{1.3}$$

where

$$\mathscr{R}=\{A\in\mathscr{E}:\limsup_{t\to 0+}\sup_{x\in A}[1-P(t,x,\{x\})]=0\}. \tag{1.4}$$

$$\delta(x,A)=1 \text{ if } x\in A;\ \delta(x,A)=0 \text{ if } x\notin A.$$

Theorem 1.3. *Suppose $(E,\mathscr{E})$ satisfies $\{(x,x):x\in E\}\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ (for example, E is a Hausdorff space). Then every totally stable Markov process is a q-process with respect to some q-pair $q(x)-q(x,A)$, where "totally stable" means that*

$$\bar{q}(x)=\lim_{t\to 0+}[1-P(t,x,\{x\})]\cdot t^{-1}<\infty,\ \forall x\in E.$$

Proof. By [13; Theorem 4.1], the above limits always exist, and

$$\hat{q}(x,A)\triangleq\lim_{t\to 0+}P(t,x,A)t^{-1}<\infty,\ \forall A\in\mathscr{R}, E\ni x\notin A.$$

In [13] Kendall proved that if we define $q(x,A)=\hat{q}(x,A\backslash\{x\})$, then

i) $\mathscr{R}$ is a ring;

ii) $\bar{q}(\cdot)$ and $\bar{q}(\cdot,A)\in\mathscr{E}_+$ for every $A\in\mathscr{R}$;

iii) $\bar{q}(x,\cdot)$ is a measure on $\mathscr{R}$ for every $x\in E$;

iv) if $\sup_{x\in A}\bar{q}(x)<\infty$, then $A\in\mathscr{R}$.

Therefore there exists $A_n\in R$ such that $A_n\uparrow E$, and hence $q(x,\cdot)$ can be extended to a unique measure on $\mathscr{E}$ for every $x\in E$, and we may also write $\bar{q}(x,\cdot)$. Clearly, the extended $\bar{q}(x)-\bar{q}(x,A)$ is also a $\bar{q}$-pair, and for every $\forall x\in E, \forall A\in\mathscr{R}$, we have

$$\lim_{t\to 0+}[P(t,x,A)-\delta(x,A)]\cdot t^{-1}=\bar{q}(x,A)-\bar{q}(x)\delta(x,A).$$

Lemma 1.4. *Suppose that $q(x)-q(x,A)$ is totally stable. Then, for every fixed $A\in\mathscr{E}$, $\inf_{x\in A}P^{\min}(\lambda,x,E)>0$ holds for some $\lambda_0>0$ if and only if it holds for all $\lambda>0$, where $P^{\min}(\lambda,x,A)(\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E})$ is the minimal nonnegative solution of the following equation:*

$$\text{(B)}\quad P(\lambda,x,A)=\int\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}P(\lambda,y,A)+\frac{\delta(x,A)}{\lambda+q(x)},\ (\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}).$$

Proof. It is enough to prove the necessity. Since $P^{\min}(\lambda,x,A)$ satisfies the resolvent equation [7; Theorem 5.1. (iii)], if $\lambda<\lambda_0$, then we have $P^{\min}(\lambda,x,E)\downarrow$ $(\lambda\uparrow)$ for fixed x. Hence

$$\inf_{x\in A}\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)\geqslant\lambda\lambda_0^{-1}\cdot\inf_{x\in A}P^{\min}(\lambda_0,x,E)>0.$$

On the other hand, since

$$z_\lambda(x)-z_\mu(x)+(\lambda-\mu)\int p^{\min}(\lambda,x,dy)z_\mu(y)=0 \tag{1.5}$$

$$(\lambda,\mu>0,x\in E),$$

where $z_\lambda(x) \triangleq 1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)(\lambda > 0, x \in E)$, then we have

$$\lambda P^{\min}(\lambda, x, E) \uparrow (\lambda \uparrow), \tag{1.6}$$

and hence $\inf_{x \in A} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0$ for $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Definition 1.5. A q-pair $q(x) - q(x, A)$ is given. A measurable partition $\{E_n\}_{n \geqslant 1}$ is called a q-partition if

$$\sup_{x \in E_n} q(x) < +\infty, (\forall n \geqslant 1), \tag{1.7}$$

$$\inf_{x \in E_n} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0, (\forall n \geqslant 1, \forall \lambda > 0). \tag{1.8}$$

Remarks. Fixed an arbitrary $\lambda > 0$. Put

$$E_{m,n}(\lambda) = \{x \in E : n - 1 \leqslant q(x) < n, (m+1)^{-1} < \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) \leqslant m^{-1}\}(m, n \geqslant 1).$$

From Lemma 1.4, we know that $\{E_{m,n}\}$ is a q-partition. From now on, we always assume that we have taken and fixed a q-partition.

Theorem 1.6. *Let $q(x) - q(x, A)$ be a total stable q-pair. Again let $\{E_n\}_{n \geqslant 1}$ be a q-partition and $P(t, x, A)$ be a Markov process, then*

i) *$P(t, x, A)$ is a q-process if and only if*

$$\lim_{t \to 0+} [P(t, x, A) - \delta(x, A)]t^{-1} = q(x, A) - \delta(x, A)q(x)$$

$$(\forall x \in E, A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geqslant 1). \tag{1.9}$$

ii) *If $q(x) - q(x, A)$ is conservative, then $P(t, x, A)$ is a q-process iff*

$$\lim_{t \to 0+} [P(t, x, A) - \delta(x, A)]t^{-1} = q(x, A) - \delta(x, A)q(x),$$

$$(\forall x \in E, A \in \mathscr{E}). \tag{1.10}$$

Proof. Assertion i) follows from the proof of Theorem 1.3, and assertion ii) follows from [13] or Theorem 2 of § 6.1 in [10].

As usual, the Laplace transform $P(\lambda, x, A)$ of a Markov process $P(t, x, A)$ is also called a Markov process. It is not difficult to prove the following

Theorem 1.7. *A Markov process $P(\lambda, x, A)$ is a q-process if and only if*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda[\lambda P(\lambda, x, A) - \delta(x, A)] = q(x, A) - \delta(x, A)q(x),$$

$$(\forall x \in E, A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geqslant 1). \tag{1.11}$$

II. Some Lemmas

Hereafter, we always suppose $q(x) - q(x, A)$ is totally stable.

Definition 2.1. We say that a Markov process $P(\lambda, x, A)$ satisfies (B_n) or (F_n) if we have respectively:

$$(B_n) \int [(\lambda + q(x))\delta(x, dy) - q(x, dy)]P(\lambda, y, A) = \delta(x, A),$$

$$(\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E} \cap E_n), \tag{2.1}$$

and

$$(\mathrm{F}_n)\ \int P(\lambda, x, dy)[(\lambda + q(y))\delta(y, A) - q(y, A)] = \delta(x, A),$$
$$(\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E} \cap E_n). \tag{2.2}$$

Proposition 2.2. *In order to make (B) hold, it is necessary and sufficient that* (B_n) *holds for all n; and in order to make* (F_n) *hold for all n, it is necessary and sufficient that there must be*

$$(\mathrm{F})\ P(\lambda, x, A) = \int P(\lambda, x, dy) \int_A q(y, dz)(\lambda + q(z))^{-1}$$
$$+ \delta(x, A)(\lambda + q(x))^{-1},\ (\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E}). \tag{2.3}$$

Proof. Here we only prove: (2.2) holds for all n which is equivalent to (2.3) to be held. The first is equivalent to

$$\int_A P(\lambda, x, dy)(\lambda + q(y)) = \int P(\lambda, x, dy)q(y, A) + \delta(x, A),$$
$$(\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E}). \tag{2.4}$$

Regarding both sides as measures in A and taking integrals for $(\lambda + q(x))^{-1}\ \delta(x, A)$, we obtain (2.3). Conversely, if (2.3) holds, then regarding both sides as measures in A and taking integrals for $(\lambda + q(x)) \cdot \delta(x, A)$, we obtain (2.4).

By [7; Theorem 3.1] and [8; Theorem 5.2], we obtain

Proposition 2.3. $P^{\min}(\lambda, x, A)$ *satisfies* (B) *and* (F).

Let

$$\mathscr{U}_{-\lambda} = \{f \in b\mathscr{E}_+ : (\lambda + q(\cdot))f(\cdot) = \int q(\cdot, dy)f(y)\},$$
$$\mathscr{V}_\lambda = \{\varphi \in \mathscr{L}_+ : \varphi(\cdot) = \int \varphi(dx) \int q(x, dy)(\lambda + q(y))^{-1}\},$$

$$\mathscr{V}'_\lambda = \{\varphi \in \mathscr{L}_+ : \int \varphi(dx)[(\lambda + q(x))\delta(x, A) - q(x, A)] = 0, \forall A \in \mathscr{E} \cap E_n, \forall n \geqslant 1\},$$
$$R(\lambda, \mu, x, A) = \delta(x, A) + (\lambda - \mu)P^{\min}(\mu, x, A), (\lambda, \mu > 0, x \in E, A \in \mathscr{E}).$$

Definition 2.4. $f_\lambda \in b\mathscr{E}_+ (\lambda > 0)$ are called a (functional) coordinated family if

$$f_\lambda(\cdot) = \int R(\mu, \lambda, \cdot, dy)f_\mu(y),\ (\lambda, \mu > 0).$$

$\varphi_\lambda \in \mathscr{L}_+ (\lambda > 0)$ are called a (measures) coordinated family if

$$\varphi_\lambda(\cdot) = \int \varphi_\mu(dx)R(\mu, \lambda, x, \cdot),\ (\lambda, \mu > 0).$$

By [7; Proposition 6.2], and using the proofs of Proposition 2.2 and [7; Proposition 6.5], we can prove

Proposition 2.5.

i) *For any fixed* $\lambda_0 > 0$ *and* $f_{\lambda_0} \in \mathscr{U}_{\lambda_0}$, *put* $f_\mu(\cdot) \triangleq \int R(\lambda_0, \mu, \cdot, dy)f_{\lambda_0}(y) (\mu > 0)$, *then* $f_\mu \in \mathscr{U}_\mu$, *and* $f_\lambda (\lambda > 0)$ *is a coordinated family.*

ii) $\mathscr{V}_\lambda = \mathscr{V}'_\lambda$. *For any fixed* $\lambda_0 > 0$ *and* $\varphi_{\lambda_0} \in \mathscr{V}_{\lambda_0}$, *put* $\varphi_\mu(\cdot) \triangleq \int \varphi_{\lambda_0}(dx)R(\lambda_0, \mu, x, \cdot) (\mu > 0)$, *then* $\varphi_\mu \in \mathscr{V}_\mu$ *and* $\varphi_\lambda (\lambda > 0)$ *is a coordinated family.*

iii) *The dimensions of* $\mathscr{U}_\lambda$ *and* $\mathscr{V}_\lambda$ *are all independent of* $\lambda > 0$, *and denoted by* dim $\mathscr{U}$ *and* dim $\mathscr{V}$ *respectively.*

Lemma 2.6. *In order that* $\eta_\lambda(\lambda > 0)$ *is a coordinated family of measures it is necessary and sufficient that there exists a* $\omega \in \bar{\mathscr{L}}_+$ *such that*

$$\int \omega(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot) \in \mathscr{L}_+, \tag{2.5}$$

and there exists a coordinated family $\bar{\eta}_\lambda \in \mathscr{V}_\lambda(\lambda > 0)$ *such that*

$$\eta_\lambda(\cdot) = \int \omega(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot) + \bar{\eta}_\lambda(\cdot). \tag{2.6}$$

Then ω *and* $\bar{\eta}_\lambda(\lambda > 0)$ *are unique.*

Proof. It is enough to prove the sufficiency. If η_λ is a coordinated family, then

$$\eta_\nu(A) + (\nu - \lambda)\int \eta_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A) = \eta_\lambda(A) \geqslant 0,$$

so that

$$\nu\eta_\nu(A) \geqslant (1 - \lambda^{-1}\nu)\int \eta_\nu(dx)\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda, x, A) - \delta(x, A)].$$

From [13; Theorem 4.1], we know that $P^{\min}(t, x, \{x\}) \geqslant \exp[-q(x)t]$, and hence $\lambda[1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, \{x\})] \leqslant q(x)(\lambda > 0, x \in E)$. Fixing ν and letting $\lambda \to \infty$, we obtain

$$\nu\eta_\nu(A) \geqslant \varlimsup_{\lambda\to\infty}(1 - \lambda^{-1}\nu)\int_{E\setminus A}\eta_\nu(dx)\lambda^2 P^{\min}(\lambda, x, A) + \varlimsup_{\lambda\to\infty}(1 - \lambda^{-1}\nu)$$
$$\cdot \int_A \eta_\nu(dx)\lambda[\lambda P^{\min}(\lambda, x, A) - 1] \geqslant \int \eta_\nu(dx)[q(x, A) - \delta(x, A)q(x)],$$

for every $A \in \mathscr{E} \cap En(n \geqslant 1)$.

Set

$$\omega_\nu(A) = \nu\eta_\nu(A) - \int \eta_\nu(dx)[q(x, A) - \delta(x, A)q(x)]$$
$$(A \in \mathscr{E} \cap En, n \geqslant 1), \tag{2.7}$$

then

$$0 \leqslant \omega_\nu(A) < +\infty(\forall A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geqslant 1). \tag{2.8}$$

ω_ν can be extended to a unique measure $\omega_\nu \in \bar{\mathscr{L}}_+$. We will prove that

$$\int \omega_\nu(dx)P^{(n)}(\nu, x, A) \leqslant \eta_\nu(A), (\forall A \in \mathscr{E}, n \geqslant 0), \tag{2.9}$$

where $P^{(0)}(\nu, x, A) = 0, P^{(n+1)}(\lambda, x, A) = \int P^{(n)}(\lambda, x, dy)\cdot\int_A q(y, dz)(\lambda + q(z))^{-1} + \delta(x, A)(\lambda + q(x))^{-1}(n \geqslant 0)$. When $n = 0$, (2.9) is trivial. Now suppose that it holds for n. From (2.7) and (2.8), $0 \leqslant \int \eta_\nu(dx)q(x, A) < \infty$ for $A \in \mathscr{E} \cap E_m$, hence

$$0 \leqslant \int \eta_\nu(dy)\int_A q(y, dz)(\nu + q(z))^{-1} < \infty,$$

$$\int \omega_\nu(dx)P^{(n+1)}(\nu, x, A)$$
$$= \int \omega_\nu(dx)\left[\int P^{(n)}(\nu, x, dy)\int_A \frac{q(y, dz)}{\nu + q(z)} + \frac{\delta(x, A)}{\nu + q(x)}\right]$$
$$\leqslant \int \eta_\nu(dy)\int_A \frac{q(y, dz)}{\nu + q(z)} + \int_A \frac{\omega_\nu(dx)}{\nu + q(x)} = \eta_\nu(A) \quad A \in \mathscr{E} \cap E_m, m \geqslant 1.$$

This shows that (2.9) holds. In (2.9), letting $n \to \infty$, from [8; Theorem 8.2 and Lemma 4.1] and the monotone convergence theorem, we obtain

$$\eta_\nu(A) \geqslant \int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A), (A \in \mathscr{E}). \tag{2.10}$$

Now set

$$\bar{\eta}_\nu(A) = \eta_\nu(A) - \int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A), (A \in \mathscr{E}), \tag{2.11}$$

then from (2.7) and the fact that $P^{\min}(\lambda, x, A)$ satisfies (B), we obtain

$$\int \bar{\eta}_\nu(dx)[(\nu + q(x))\delta(x, A) - q(x, A)]$$
$$= \omega_\nu(A) - \int \omega_\nu(dx)\int P^{\min}(\nu, x, dy)[(\nu + q(y))\delta(y, A) - q(y, A)]$$
$$= \omega_\nu(A) - \omega_\nu(A) = 0,$$

for every $A \in \mathscr{E} \cap E_n$ and $n \geqslant 1$. This means $\bar{\eta}_\nu \in \mathscr{V}_\nu$. Now we want to prove that ω_ν and $\bar{\eta}_\nu$ are determined uniquely by η_ν. If ω'_ν and $\bar{\eta}'_\nu$ also satisfy (2.11), then

$$\int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A) + \bar{\eta}_\nu(A)$$
$$= \int \omega'_\nu(dx)P^{\min}(\nu, x, A) + \bar{\eta}'_\nu(A) \quad (\forall A \in \mathscr{E}).$$

Regarding both-hand sides as measures in A and taking integrals for

$$[(\nu + q(x))\delta(x, A) - q(x, A)] \quad (A \in \mathscr{E} \cap E_n),$$

from $P^{\min}(\lambda, x, A)$ satisfying (F_n) and $\bar{\eta}_\nu, \bar{\eta}'_\nu \in \mathscr{V}_\nu$, we obtain

$$\omega_\nu(A) = \omega'_\nu(A), \quad (\forall A \in \mathscr{E}).$$

Thus, we have already proved that the decomposition is unique for any fixed $\nu > 0$. However

$$\eta_\lambda(A) = \int \eta_\nu(dx)R(\nu, \lambda, x, A)$$
$$= \int \omega_\nu(dx)\int P^{\min}(\nu, x, dy)R(\nu, \lambda, y, A) + \int \bar{\eta}_\nu(dx)R(\nu, \lambda, x, A)$$
$$= \int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A) + \int \bar{\eta}_\lambda(dx)R(\nu, \lambda, x, A). \tag{2.12}$$

Clearly, $\int \omega_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot) \in \mathscr{L}_+$, and from ii) of Proposition 2.5, we know that

$$\int \bar{\eta}_\nu(dx)R(\nu, \lambda, x, \cdot) \in \mathscr{V}_\lambda(\lambda > 0).$$

Therefore from the uniqueness of ω_λ and $\bar{\eta}_\lambda$, we know that ω_λ is independent of λ, and therefore it can be denoted by ω. Furthermore $\bar{\eta}_\lambda(\lambda > 0)$ is a coordinated family.

Lemma 2.7. *If $\eta_\lambda(\lambda > 0)$ is a coordinated family of measures, then*

$$\eta_\lambda \downarrow 0, \quad (\lambda \uparrow \infty). \tag{2.13}$$

Furthermore, if $\eta_\lambda \in \mathscr{V}_\lambda(\lambda > 0)$, then

$$\begin{aligned}
&\lambda\eta_\lambda(A) - \nu\eta_\nu(A) \\
&\quad = (\lambda - \nu)\int \eta_\lambda(dx)[\delta(x, A) - \nu P^{\min}(\nu, x, A)] \\
&\quad = (\lambda - \nu)\int \eta_\nu(dx)[\delta(x, A) - \lambda P^{\min}(\lambda, x, A)] \\
&\qquad (\lambda, \nu > 0, A \in \mathscr{E}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Proof. By the coordination, we have

$$\begin{aligned}
\eta_\lambda(A) &= \eta_\nu(A) + (\nu - \lambda)\int \eta_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A) \\
&= \eta_\nu(A) + \nu\int \eta_\nu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A) - \int \eta_\nu(dx)\lambda P^{\min}(\lambda, x, A),
\end{aligned}$$

so that (2.13) follows. If $\eta_\lambda \in \mathscr{V}_\lambda$ also, then from the fact that $P^{\min}(\lambda, x, A)$ satisfies (F_n) $(n \geqq 1)$, we know that

$$\begin{aligned}
&\lambda\eta_\lambda(A) - \nu\eta_\nu(A) \\
&\quad = \sum_n [\lambda\eta_\lambda(A \cap E_n) - \nu\eta_\nu(A \cap E_n)] \\
&\quad = \sum_n \left\{\int \eta_\lambda(dx)[q(x, A \cap E_n) - q(x)\delta(x, A \cap E_n)]\right. \\
&\qquad \left. - \int \eta_\nu(dx)[q(x, A \cap E_n) - q(x)\delta(x, A \cap E_n)]\right\} \\
&\quad = \sum_n (\nu - \lambda)\int \eta_\lambda(dx)\int P^{\min}(\nu, x, dy)[q(y, A \cap E_n) - q(y)\delta(y, A \cap E_n)] \\
&\quad = (\nu - \lambda)\sum_n \int \eta_\lambda(dx)[\nu P^{\min}(\nu, x, A \cap E_n) - \delta(x, A \cap E_n)] \\
&\quad = (\lambda - \nu)\int \eta_\lambda(dx)[\delta(x, A) - \nu P^{\min}(\nu, x, A)],
\end{aligned}$$

and the second assertion follows from the symmetry between λ and ν.

Lemma 2.8. *Let $\eta_\lambda(\lambda > 0)$ be a coordinated family of measures, and similarly to Lemma 2.6, we have*

$$\eta_\lambda(\cdot) = \int \omega(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot) + \bar{\eta}_\lambda(\cdot), \quad (\lambda > 0), \tag{2.15}$$

then

$$\begin{aligned}
P(\lambda, x, A) \triangleq P^{\min}(\lambda, x, A) + [1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)](c + \lambda\eta_\lambda(E))^{-1}\eta_\lambda(A) \\
(\lambda > 0, \ x \in E, A \in \mathscr{E}; c \geqq 0 \text{ and } c + \lambda\eta_\lambda(E) > 0)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

is a Markov process. It is a q-process if and only if one of the following conditions holds:

1) $q(x) - q(x, A)$ *is conservative;*

2) $\omega = 0$;

3) $\omega(E) = +\infty$;

4) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}(E) = +\infty$.

Proof. In order to prove that $P(\lambda, x, A)$ defined by (2.16) satisfies the resolvent equation, it suffices to prove that

$$\sigma_\lambda\eta_\lambda(A) - \sigma_\mu\eta_\mu(A) + (\lambda - \mu)\int \sigma_\lambda\eta_\lambda(dx)P(\mu, x, A) = 0,$$

where $\sigma_\lambda = (c + \lambda\eta_\lambda(E))^{-1}$, $(\lambda > 0)$. From the coordination of $\eta_\lambda(\lambda > 0)$, it suffices to prove that

$$\sigma_\lambda - \sigma_\mu + (\lambda - \mu)\sigma_\lambda\sigma_\mu \int \eta_\lambda(dx)[1 - \mu P^{\min}(\mu, x, E)] = 0.$$

But $\sigma_\lambda[1 + \lambda\sigma_\mu\eta_\lambda(E)] = \sigma_\lambda\sigma_\mu[c + \lambda\eta_\lambda(E) + \mu\eta_\mu(E)]$ is symmetric for λ and μ, so that the above equality holds.

Since $P^{\min}(\lambda, x, A)$ is a q-process and from Theorem 1.7, we know that $P(\lambda, x, A)$ defined by (2.16) is a q-process if and only if

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2[1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)](c + \lambda\eta_\lambda(E))^{-1}\eta_\lambda(A) = 0$$

$$(x \in E, A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geqslant 1). \tag{2.17}$$

From [7; Theorem 3.1. (6)], we have

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda[1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)] = q(x) - q(x, E), \tag{2.18}$$

$$(\forall x \in E).$$

ν_0 being fixed, there exists a $\exists N = N(\nu_0)$ for every $\forall A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geqslant 1$ such that $\sum_{m=N+1}^{\infty} \int_{E_m} \eta_{\nu_0}(dx)q(x, A) < \varepsilon$, so from Lemma 2.7, we have

$$\int \eta_\nu(dx)q(x, A) \leqslant \sum_{m=1}^{N} \int_{E_m} \eta_\nu(dx)q(x, A) + \varepsilon,$$

for $\nu \geqslant \nu_0$. From this and [10; Appendix, Lemma 11], we know that

$$\nu\eta_\nu(A) = \omega(A) + \int \eta_\nu(dx)[q(x, A) - q(x)\delta(x, A)] \underset{\nu\to\infty}{\to} \omega(A). \tag{2.19}$$

From (1.6), the monotone convergence theorem and $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P^{\min}(\lambda, x, A) = \delta(x, A)$, we have

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int \omega(dx)\lambda P^{\min}(\lambda, x, E) = \omega(E).$$

From this, Lemma 2.7 and (2.15), we obtain that

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta_\lambda(E)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)+\omega(E). \tag{2.20}$$

If $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)+\omega(E)=0$, then $\omega=\bar{\eta}_\lambda=0$, hence $\eta_\lambda=0(\lambda>0)$, i. e. $P(\lambda,x,A)\equiv P^{\min}(\lambda,x,A)$ and at the moment the Lemma is trivial. Now we assume that

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)+\omega(E)>0.$$

From (2.18)—(2.20), we obtain that

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2[1-\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)](c+\lambda\eta_\lambda(E))^{-1}\eta_\lambda(A)=[q(x)$$
$$-q(x,E)]\omega(A)[c+\omega(E)+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}_\lambda(E)]^{-1}(x\in E,A\in\mathscr{E}\cap E_n,n\geqslant 1). \tag{2.21}$$

Therefore, from (2.17), $P(\lambda,x,A)$ is a q-process if and only if one of the conditions i)—iv) holds.

Lemma 2.9. *There exists a $\lambda>0$ such that*

$$c(\lambda)\triangleq\inf_{x\in E}\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)=0, \tag{2.22}$$

if and only if there exists a $\omega\in\mathscr{L}_+$ such that $\omega(E_n)<+\infty(\forall n\geqslant 1)$, $\omega(E)=+\infty$ and $\int\omega(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)<\infty(\forall\lambda>0)$.

Proof. The sufficiency follows from

$$\int\omega(dx)P^{\min}(\lambda,x,E)\geqslant\lambda^{-1}c(\lambda)\omega(E).$$

We return to prove the necessity. Assume that (2.22) holds. Then, there is an infinite subset $\hat{N}$ of the set N of positive integers such that

$$\sum_{n\in\hat{N}}\inf_{x\in E_n}\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)<\infty.$$

Furthermore, we can take $x_n\in E_n(n\in\hat{N})$ such that $\sum_{n\in\hat{N}}\lambda P^{\min}(\lambda,x_n,E)<\infty$. Take an arbitrary $x_n\in E_n(n\in N\backslash\hat{N})$, and put

$$\omega(\{x_n\})=\begin{cases}1, & \text{if } n\in\hat{N}\\ 0, & \text{if } n\in N\backslash\hat{N}\end{cases}$$

$$\omega(A)\triangleq\sum_{n\in N}\omega(A\cap\{x_n\}),\quad A\in\mathscr{E},$$

then $\omega(E_n)=\omega(\{x_n\})\leqslant 1$, $\omega(E)=\sum_n\omega(\{x_n\})=\infty$ and

$$\int\omega(dx)\lambda P^{\min}(\lambda,x,E)=\sum_{n\in\hat{N}}\lambda P^{\min}(\lambda,x_n,E)<\infty.$$

The proof is completed.

By using the typical methods in [12], it is easy to prove

Lemma 2.10. *Let $U(\cdot,A)$, $T(\cdot,A)$, $P(\cdot,A)$, $Q(\cdot,A)\in\mathscr{E}_+$ for each $A\in\mathscr{E}$;*

$U(x,\cdot), T(x,\cdot), P(x,\cdot) \in \mathscr{L}_+$ *for each* $x \in E$.

i) *If for each* A, $P(\cdot, A)$ *is the minimal nonnegative solution of*

$$f(\cdot) = \int U(\cdot, dy)f(y) + T(\cdot, A),$$

then $\int P(\cdot, dy)g(y)$ *is the minimal nonnegative solution of*

$$f(\cdot) = \int U(\cdot, dy)f(y) + \int T(\cdot, dy)g(y)$$

for every $g \in b\mathscr{E}_+$.

ii) *If for each* $x \in E$, $Q(x,\cdot)$ *is the minimal nonnegative solution of*

$$\varphi(\cdot) = \int \varphi(dy)U(y,\cdot) + T(x,\cdot),$$

then $\int U(dx)Q(x,\cdot)$ *is the minimal nonnegative solution of*

$$\varphi(\cdot) = \int \varphi(dy)U(y,\cdot) + \int U(dy)T(y,\cdot)$$

for every $\forall U \in \mathscr{L}_+$.

Lemma 2. 11.

i) *If* $f \in b\mathscr{E}_+$ and

$$\int [(\lambda + q(\cdot))\delta(\cdot, dy) - q(\cdot, dy)]f(y) = q(\cdot) \geqslant 0,$$

then $f(\cdot) \geqslant \int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy)g(y)$. *Moreover, if* $\dim \mathscr{U} = 0$ *also, then*

$$f(\cdot) = \int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy)g(y).$$

(ii) *If* $\mu \in \mathscr{L}_+$ *and*

$$\int \mu(dx)[(\lambda + q(x))\delta(x, A) - q(x, A)] = U(A) \geqslant 0 (A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geqslant 1), \quad (2.23)$$

then

$$\mu(\cdot) \geqslant \int U(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot). \quad (2.24)$$

If $\dim \mathscr{U} = 0$ *in addition, then*

$$\mu(\cdot) = \int U(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot). \quad (2.25)$$

Proof. We only need to prove ii). By the proof of Proposition 2.2, we know that μ is a solution of

$$\varphi(\cdot) = \int \varphi(dx) \int_\cdot q(x, dy)[\lambda + q(y)]^{-1} + \int_\cdot U(dx)[\lambda + q(x)]^{-1}. \quad (2.26)$$

However, $P^{\min}(\lambda, x, A)$ is the minimal nonnegative solution of (F), and from Lemma

2.10. ii), $\int U(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot)$ is the minimal nonnegative solution of (2.26), so (2.24) holds. Clearly,

$$\mu(\cdot) - \int U(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot) \in \mathscr{V}_1 \quad (\lambda > 0).$$

hence (2.25) holds when $\dim \mathscr{V} = 0$.

Lemma 2.12. *We have $\dim \mathscr{U} = 0$, if there exists a $\lambda > 0$ such that*

$$\inf_{x \in E} P^{\min}(\lambda, x, E) > 0.$$

Proof. The assertion follows from [12; Theorem 5].

Lemma 2.13.

i) *If $f \in r\mathscr{E}$ and*

$$\int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy)f(y) = 0, \tag{2.27}$$

then there exists $f = 0$.

ii) *If $\mu \in \mathscr{L}$ and*

$$\int \mu(dx)P^{\min}(\lambda, x, A) = 0 \quad (A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geqslant 1), \tag{2.28}$$

then there exists $\mu = 0$.

Proof. i) Since $P^{\min}(\lambda, x, A)$ satisfies (B) and (2.27), we have

$$f(\cdot) = \int \delta(\cdot, dy)f(y)$$

$$= [\lambda + q(\cdot)] \int P^{\min}(\lambda, \cdot, dy)f(y) - \int q(\cdot, dy) \int P^{\min}(\lambda, y, dz)f(z) = 0.$$

ii) By (2.28), we have

$$\int \mu(dx)P^{\min}(\lambda, \cdot, x) = \sum_n \int \mu(dx)P^{\min}(\lambda, x, \cdot \cap E_n) = 0.$$

Since $P^{\min}(\lambda, x, A)$ satisfies (F), we have

$$\mu(A) = \sum_n \int_{E_n \cap A} \mu(dx) = \sum_n \left\{ \int \mu(dx) \int P^{\min}(\lambda, x, dy)[(\lambda + q(y)) \right.$$

$$\left. \cdot \delta(y, A \cap E_n) - q(y, A \cap E_n)] \right\} = 0,$$

$$(A \in \mathscr{E}).$$

Lemma 2.14. *Set $G(, A) \in b\mathscr{E}_+$ for $A \in \mathscr{E}$, $G(x, \cdot) \in \mathscr{L}_+$ for $x \in E$, and*

$$0 \leqslant G(\cdot, \cdot) \leqslant 1.$$

Suppose $g \in b\mathscr{E}_+$ and f^* is the minimal nonnegative solution of

$$f(\cdot) = \int G(\cdot, dy)f(y) + g(\cdot).$$

Put

$$D = \{x : g(x) > 0\}, \tag{2.29}$$

then

$$\sup_{x \in E} f^*(x) = \sup_{y \in D} f^*(y). \tag{2.30}$$

Proof. Let $f^{(1)}(x) = g(x)$, $f^{(n+1)}(x) = \int G(x, dy) f^{(n)}(y) + g(x) (n \geq 1)$. Since (2.29), we have $f^{(1)}(x) \leq \sup_{y \in D} f^{(1)}(y) \leq \sup_{y \in D} f^*(y) (\forall x \in E)$. If $f^{(n)}(x) \leq \sup_{y \in D} f^*(y)$ $(\forall x \in E)$ for some $n \geq 1$, then for every $x \in E \backslash D$, we have

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \int G(x, dy) f^{(n)}(y) + g(x) \\ &= \int G(x, dy) f^{(n)}(y) \leq \sup_{y \in D} f^*(y) G(x, E) \leq \sup_{y \in D} f^*(y). \end{aligned}$$

Letting $n \to \infty$, we obtain $f^*(x) \leq \sup_{y \in D} f^*(y) (\forall x \in E)$. Taking supremum for x over E on the left-hand side, we obtain (2.30).

Lemma 2.15. *If dim* $\mathscr{U} = 0$, *then it follows*

$$\inf_{x \in E} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) = \inf_{x \in \dot{E}} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E), \tag{2.31}$$

where $\dot{E} = \{x \in E : q(x, E) < q(x)\}$.

Proof. By [12; Theorem 9], $\lambda P^{\min}(\lambda, x, E)$ is the minimal nonnegative solution of

$$f(\cdot) = \int \frac{q(\cdot, dy)}{\lambda + q(\cdot)} f(y) + \frac{\lambda}{\lambda + q(\cdot)},$$

hence $z_\lambda = 1 - \lambda P^{\min}(\lambda, \cdot, E)$ is the minimal solution of

$$f(\cdot) = \int \frac{q(\cdot, dy)}{\lambda + q(\cdot)} f(y) + \frac{q(\cdot) - q(\cdot, E)}{\lambda + q(\cdot)}, \quad 0 \leq f \leq 1.$$

Because dim $\mathscr{U} = 0$, it follows that z_λ is also the minimal nonnegative solution of the above equation. So from Lemma 2.14 we have

$$\sup_{x \in E} [1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)] = \sup_{x \in \dot{E}} [1 - \lambda P^{\min}(\lambda, x, E)],$$

and hence (2.31) follows.

Lemma 2.16. *For every q-process* $P(\lambda, x, A)$ *we have*

$$\begin{aligned} \lambda P(\lambda, x, A) \geq & \int P(\lambda, x, dy)[q(y, A) - q(y)\delta(y, A)] \\ & + \delta(x, A) \ (\lambda > 0, \ x \in E, A \in \mathscr{E} \cap E_n, n \geq 1). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Proof. By the resolvent equation, the assertion follows from the proof of Lemma 2.6 before (2.7).

Proposition 2.17. *There exists only one q-process which satisfies* (F) *if and only if the minimal q-process* $P^{\min}(\lambda, x, A)$ *is honest or dim* $\mathscr{Y} = 0$.

Proof. Sufficiency is clear. We will prove the necessity. Suppose that the minimal

q-process $P^{\min}(\lambda, x, A)$ is not honest and $\dim \mathscr{V} = 0$. Fixing $\lambda_0 > 0$, taking

$$0 \neq \eta_{\lambda_0} \in \mathscr{V}_{\lambda_0}$$

and putting $\bar{\eta}_\lambda(\cdot) = \int \eta_{\lambda_0}(dx) R(\lambda_0, \lambda, x, \cdot)$, $\lambda > 0$, from Proposition 2.5. ii) we know that $\bar{\eta}_\lambda (\lambda > 0)$ is a coordinated family and $\bar{\eta}_\lambda \in \mathscr{V}_\lambda (\lambda > 0)$. Taking $\bar{\eta}_\lambda$ instead of η_λ in (2.16), we obtain a q-process which satisfies (F) and is different to $P^{\min}(\lambda, x, A)$. This leads to a contradiction.

III Proofs of Main Theorems

Theorem 3.1. *Suppose that q-pair $q(x) - q(x, A)$ is totally stable. Then there exists only one q-process if and only if we simultaneously have*

i) $$c(\lambda) \triangleq \inf_{x \in \bar{E}} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0, \quad (\exists \lambda > 0). \tag{3.1}$$

ii) *there exists only one q-process which satisfies* (F).

Proof. Necessity. If (3.1) does not hold, then taking ω as in Lemma 2.9 and from Lemma 2.8, we know that (2.16) gives an honest q-process. However, $P^{\min}(\lambda, x, A)$ is not honest because (3.1) does not hold, and so q-processes are not unique.

Sufficiency. Having the preparations of the preceding section in mind, it is not difficult to prove the sufficiency. One can find the idea of this proof from [5]. The details are left to reader.

By Lemmas 2.15 and 2.12 and by Proposition 2.17 and [6; § 4], we obtain

Theorem 3.2. *Suppose q-pair $q(x) - q(x, A)$ is totally stable, then there exists only one q-process if and only if the following three conditions all hold:*

i) $\inf_{x \in E} \lambda P^{\min}(\lambda, x, E) > 0 \quad (\lambda > 0)$;

ii) $\dim \mathscr{U} = 0$;

iii) *$q(x) - q(x, A)$ is conservative; or although it is not conservative, it is still dim $\mathscr{V} = 0$.*

From this it is easy to prove that

Theorem 3.3. *If q-pair is bounded, then there exists only one q-process.*

We would like to thank Profs. Yan Shijian and Hou Zhenting for their comments.

References

[1] 侯振挺，中国科学，1974, 2:115—130.
[2] Reuter, G. E. H., *Acta. Math.*, **97**(1957), 1—46.
[3] ————, *J. London. Math. Soc.*, **34**(1959), 81—91.
[4] ————, *ibid.*, **37**(1962), 63—73.
[5] ————, *Z. Wahr.*, **33**(1976), 309—315.
[6] 胡迪鹤，数学学报，**16**(1966), 2:150—165.
[7] ————，武汉大学学报，1978, 4:1—18; 1979, 1: 15—38.

[8] 陈木法，数学年刊，**1**(1980)，3—4：437—451.
[9] 郑小谷，科学通报，**13**(1982)，830.
[10] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.
[11] 胡迪鹤，数学学报，**23**(1980)，5：750—757.
[12] 陈木法，北京师范大学学报，1979，3:63—73.
[13] Kendall, D. G., *TAMS*, **78**(1955), 2:529—540.
[14] Feller, W., *ibid.*, **48**(1940), 488—515; **58**(1945), 474.
[15] ————, *Ann. of Math.*, II. Ser., **65**(1957), 527—570.
[16] Doob, J. L., *TAMS*, **58**(1945), 455—473.

www.cnki.net

第 25 卷 第 2 期　　数 学 学 报　　Vol. 25, No. 2
1982 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Mar., 1982

第 二 章

有限流出有势 Q 过程*

陈 木 法
(北京师范大学)

在文[1]中，我们建立了一种抽象场，详细地研究了场的有势性．我们应用场论的结果，研究了马氏链、马氏过程、Q 矩阵等的有势性和可逆性．我们也研究了一些 Q 过程(生灭过程、单流出 Q 过程等)的有势性问题．本文主要研究有限流出 Q 过程的有势性和可逆性问题．

先前，我们仅限于讨论不断的过程的有势性，自本文开始，我们将允许过程中断．§1 讨论允许过程中断时的若干一般性结果．§2 和 §3 给出有限流出有势 Q 过程的构造．Williams[8] 给出了有限流出 Q 过程的一般构造，但他将流入解重新调整，这对于讨论有势性是不方便的．Feller[7] 固定流入解给出了同时满足两个微分方程组的 Q 过程的构造，但他的论证有误，仅适用于 $\mathfrak{A}_\lambda > 0$ 的情况．在这里，我们抓住了有势性的特征，直接构造了一切有势 Q 过程．§4 讨论有限流出可配称、可逆 Q 过程的构造．§5 给出有限流出不断的有势 Q 过程的存在准则．我们证明了条件(2.1)是必要的．§6 给出双流出不断的有势(可配称、可逆) Q 过程的唯一性判准；而在非唯一时，我们构造了无穷多个不断的有势(可配称、可逆) Q 过程．§7 给出了一般有限流出有势(可配称、可逆) Q 过程的唯一性判准．从而使有限流出情形得以完满解决．

本文是在严士健老师和侯振挺老师的指导下完成的．杨向群同志给作者指出了 Feller[7] 中的毛病．作者向他们表示衷心的感谢．

§1. 一 般 结 果

设 E 是任一可列集(赋予散拓扑)．$Q = (q_{ij})$ 是一个 Q 矩阵，即

$$0 \leqslant q_{ij} < \infty \quad (i \neq j), \qquad 0 \leqslant q_i \equiv -q_{ii} < \infty \quad (\forall i \in E), \tag{1.1}$$

$$\sum_j q_{ij} \leqslant 0 \qquad (\forall i \in E). \tag{1.2}$$

如果(1.2)中的等号总成立，则称 Q 是保守的．再设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 是以 $Q = (q_{ij})$ 为密度矩阵的 Q 过程．即 $P(t)$ 是定义在 $E \times E$ 上的一族实函数，它满足

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \sum_k p_{ik}(t) \leqslant 1, \tag{1.3}$$

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \tag{1.4}$$

* 1979 年 10 月 22 日收到．1981 年 6 月 10 日收到修改稿．

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = q_{ij}, \tag{1.6}$$

此处 $\delta_{ii} = 1$，$\delta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. 如果 $\sum_k p_{ik}(t) = 1(\forall i, \forall t)$，则称过程 $P(t)$ 不断；否则称为中断的.

定义 1.1　称 $Q = (q_{ij})$ 是零流出的，如果方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda u_\lambda(i) - \sum_j q_{ij} u_\lambda(j) = 0 \\ &0 \leqslant u_\lambda(i) \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \quad (i \in E,\ \lambda > 0) \tag{1.7}$$

只有零解. 如果方程(1.7)只有有限多个线性独立解，则称 Q 是有限流出的. 特别，若它只有一个非零的线性独立解，则称 Q 为单流出的. 方程(1.7)的极大非零线性独立解的个数称为它的维数.

周知，维数与 $\lambda > 0$ 无关.

定义 1.2　称过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 有势(等价地，弱可配称[1])，如果存在 $\Pi = (\pi_i)$，使得

$$\pi_i > 0 \qquad (\forall i \in E), \tag{1.8}$$

$$\pi_i p_{ij}(t) = \pi_j p_{ji}(t) \qquad (\forall i, j \in E, \forall t > 0), \tag{1.9}$$

此时称 Π 为 $P(t)$ 的配称列. 如果还有

$$\sum_i \pi_i = 1, \tag{1.10}$$

则称 $P(t)$ 可配称，并称 Π 为 $P(t)$ 的配称分布.

关于中断 Q 过程，文[1]中的结果除极个别而外均可保留. 特别，由[1, § 11] 中的定理及其证明可得

定理 1.1　如果 Q 过程 $(p_{ij}(t))$ 有势(可配称)，则它的 Q 矩阵有势(可配称).

定理 1.2　最小 Q 过程 $(p_{ij}^{\min}(t))$ 有势(可配称)的充要条件是它的 Q 矩阵有势 (可配称).

定理 1.3　设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 是弱可配称 Q 过程，则对于某一对 $i, j \in E$，

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) q_{kj} \tag{1.11}$$

成立的充要条件是

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t). \tag{1.12}$$

由定理 1.1 和定理 1.2 立得下面的有势(可配称) Q 过程的存在准则：

定理 1.4　有势(可配称) Q 过程存在的充要条件是它的 Q 矩阵有势 (可配称). 当 Q 矩阵有势(可配称)时，最小 Q 过程就是一个有势(可配称) Q 过程.

下面是有势 Q 过程的一个唯一性判据.

www.cnki.net

定理 1.5 设 $Q=(q_{ij})$ 保守、弱可配称，并设 $\Pi=(\pi_i)$是它的一个配称列，满足条件

$$\sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i) < \infty, \tag{1.13}$$

这里

$$\bar{X}_\lambda(i) = 1 - \lambda \sum_j p_{ij}^{\min}(\lambda) \tag{1.14}$$

是方程(1.7)的最大解，而

$$p_{ij}^{\min}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}^{\min}(t)\,dt, \tag{1.15}$$

那么，关于Π的有势Q过程唯一的充要条件是Q过程唯一. 即最小Q过程不断或方程(1.7)只有零解.

证 充分性易证，往证必要性，设方程(1.7)有非零解，即

$$\bar{X}_\lambda \neq 0 \tag{1.16}$$

(注意 $\bar{X}_\lambda$ 对于 $\lambda>0$ 同时为零或同时不为零). 于是由[5; 定理 3]知

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \frac{\bar{X}_\lambda(i)\pi_j \bar{X}_\lambda(j)}{\lambda \sum_k \pi_k \bar{X}_\lambda(k)} \tag{1.17}$$

是一个关于Π的有势Q过程(我们将Q过程 $P(t)$ 的拉氏变换 P_λ 也叫做Q过程)，而且是不断的. 再由定理 1.2 知，最小Q过程也是一个关于Π的有势Q过程. 但由(1.16)和(1.17)知

$$P_\lambda \neq P_\lambda^{\min}, \tag{1.18}$$

故有势Q过程非唯一. 定理证毕.

注意，若

$$\sum_i \pi_i < \infty, \tag{1.19}$$

则条件(1.13)总满足. 因此由定理1.5立得

定理 1.6 设 $Q=(q_{ij})$ 保守、可配称，并设 $\Pi=(\pi_i)$ 是Q的一个配称分布，则关于Π的可配称Q过程唯一的充要条件是Q过程唯一，即最小Q过程不断或方程(1.7)只有零解.

定义 1.3 称Q过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 可逆，如果存在正分布 $\Pi=(\pi_i)$：

$$\pi_i > 0 \quad (\forall i \in E), \quad \sum_i \pi_i = 1, \tag{1.20}$$

使得条件

(i) $$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \qquad (\forall i \in E); \tag{1.21}$$

(ii) $P(t)$ 关于Π可配称

同时成立.

命题 1.1 每一个可逆Q过程都是不断的.

证 设 $(p_{ij}(t))$ 是一个可逆Q过程，它有配称分布 (π_i). 如果存在 $i\in E$ 和 $t>0$，使

$$\sum_j p_{ij}(t) < 1, \tag{1.22}$$

则由(1.4)易见

$$1 > \sum_j p_{ij}(t) > \sum_j p_{ij}(2^m t), \qquad m \geqslant 1. \tag{1.23}$$

由上面两式得

$$\pi_i > \pi_i \sum_j p_{ij}(t) > \pi_i \sum_j p_{ij}(2^m t) = \sum_j \pi_j p_{ji}(2^m t). \tag{1.24}$$

命 $m \to \infty$，利用 (1.20)、条件 (i) 及控制收敛定理，得

$$\pi_i > \pi_i \sum_j p_{ij}(t) \geqslant \sum_j \pi_j \pi_i = \pi_i, \tag{1.25}$$

导致矛盾. 证毕.

对于保守 Q 矩阵，我们已经得到了可逆 Q 过程的存在准则[4].

定理 1.7　设 $Q = (q_{ij})$ 保守，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称，并且下述两条件

(i) Q 既约零流出；

(ii) Q 的每一子块非零流出

之一成立.

今设 Q 保守，并命

$$\bar{E} = \{i \in E : \bar{X}_\lambda(i) = 0\} \qquad (\text{与 } \lambda \text{ 无关}), \tag{1.26}$$

$$\hat{E} = E - \bar{E}, \tag{1.27}$$

$$\bar{Q} = (q_{ij} : i, j \in \bar{E}), \tag{1.28}$$

$$\hat{Q} = (q_{ij} : i, j \in \hat{E}), \tag{1.29}$$

对于任一 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$，命

$$\bar{P}(t) = (p_{ij}(t) : i, j \in \bar{E}), \tag{1.30}$$

$$\hat{P}(t) = (p_{ij}(t) : i, j \in \hat{E}), \tag{1.31}$$

由[7；定理 5.2]知

$$\sum_{j \in \bar{E}} p_{ij}^{\min}(t) = 1 \qquad \forall i \in \bar{E}. \tag{1.32}$$

于是对任一 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 来说，

$$p_{ij}(t) = p_{ij}^{\min}(t) \qquad i, j \in \bar{E}, \tag{1.33}$$

$$p_{ij}(t) = 0 \qquad i \in \bar{E}, j \in \hat{E}. \tag{1.34}$$

从而当 $i, j \in \hat{E}$ 时，

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+t) &= \sum_{k \in \bar{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t) + \sum_{k \in \hat{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k \in \hat{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t). \end{aligned} \tag{1.35}$$

即 $\hat{P}(t)$ 满足(1.4). 由此易见 $\bar{P}(t)$ 和 $\hat{P}(t)$ 都是 Q 过程.

定理 1.8　设 Q 保守，并使用上述记号，则

(i) $\bar{Q}$ 保守;若 Q 有势,则 $\hat{Q}$ 也保守.

(ii) 如果 $P(t)$ 是一个(不断的)有势 Q 过程,则 $\bar{P}(t)$ 和 $\hat{P}(t)$ 也都是(不断的)有势 Q 过程. 反之,

(iii) 如果 Q 有势,且 $\bar{P}(t)=(\bar{p}_{ij}(t):i,j\in\bar{E})$ 和 $\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t):i,j\in\hat{E})$ 是(不断的)有势 Q 过程,则由

$$\tilde{p}_{ij}(t)\triangleq\begin{cases}\bar{p}_{ij}(t) & i,j\in\bar{E},\\ \hat{p}_{ij}(t) & i,j\in\hat{E},\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{1.36}$$

所定义的 $\tilde{P}(t)=(\tilde{p}_{ij}(t):i,j\in E)$ 也是一个(不断的)有势 Q 过程,而且任一 E 上的(不断的)有势 Q 过程必定形如 $\tilde{P}(t)$.

进而,我们有

(iv) 不影响(不断的)有势(可配称、可逆) Q 过程的存在性、唯一性及构造,我们可假定 $\bar{X}_\lambda>0$.

证 若 Q 有势,则

$$q_{ij}=q_{ji}=0,\qquad \forall i\in\bar{E},\forall j\in\hat{E}.\tag{1.37}$$

由此立得 (i). 先不管过程是否中断. (ii) 是显然的. 如果 $\bar{P}(t)$ 和 $\hat{P}(t)$ 都是有势 Q 过程,并且 Q 有势,则由上述事实立知由 (1.36) 所定义的 $\tilde{P}(t)$ 也是一个 Q 过程. 今设 $\bar{P}(t)$ 有配称列 $\bar{\Pi}=(\bar{\pi}_i:i\in\bar{E})$, $\hat{P}(t)$ 有配称列 $\hat{\Pi}=(\hat{\pi}_i:i\in\hat{E})$, 并取

$$\pi_i=\begin{cases}\bar{\pi}_i & i\in\bar{E},\\ \hat{\pi}_i & i\in\hat{E},\end{cases}\tag{1.38}$$

则 $\Pi=(\pi_i)$ 是 Q 的一个配称列. 并且 $\tilde{P}(t)$ 是以 $\Pi=(\pi_i)$ 为配称列的有势 Q 过程.

今设 $P(t)$ 是 E 上的任一有势 Q 过程,则由(1.34)知

$$p_{ij}(t)=0,\qquad i\in\bar{E},\ j\in\hat{E}.\tag{1.39}$$

再由 $P(t)$ 的有势性知

$$p_{ji}(t)=0,\qquad i\in\bar{E},\ j\in\hat{E}.\tag{1.40}$$

故由(1.33),(1.39)和(1.40)知 $P(t)$ 必定形如(1.36)所定义的 $\tilde{P}(t)$.

另一方面,因为 $\bar{P}(t)$ 不断,故 $P(t)$ 不断等价于 $\hat{P}(t)$ 不断. 故 (ii) 和 (iii) 都成立.

为证 (iv),先看有势情形. 注意,Q 有势是存在有势 Q 过程的必要条件. 由此易证所需结论. 把"有势"换成"可配称",重复上述讨论,立知可配称情形 (iv) 成立. 如果 Q 既约零流出,则 $\hat{E}=\emptyset$. 此时可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称,而且存在时必定唯一,它就是 $p^{\min}(t)$. 若 Q 非既约,则可逆 Q 过程的存在导致 $E=\hat{E}$. 从而 (iv)自然成立. 定理证毕.

由定理 1.8(iv) 知,在讨论(不断的)有势(可配称、可逆) Q 过程的构造时,可假定

$$\bar{X}_\lambda(i)>0\qquad(\forall i\in E)\tag{1.41}$$

而不失一般性. 即只须讨论 $\hat{P}(t)$ 的构造便已足够. 因此,在本文后面的构造中,我们常假定(1.41)成立.

因为 $q_i=0$ 导致 $\bar{X}_\lambda(i)=0$,故条件(1.41)推出我们的 Q 矩阵满足

$$0 < q_i \equiv -q_{ii} < \infty \quad (\forall i \in E). \tag{1.42}$$

§2. 有限流出有势 Q 过程的构造

自本节开始，我们在假定方程 (1.7) 只有有限多个线性独立解之下，来讨论有势 Q 过程的构造问题. 我们给出直接的构造而不必求助于[6]—[8]中的构造结果. 虽然有几个中间步骤可直接引用[8]，但为读者方便，我们将不这样做.

设 $Q = (q_{ij})$ 保守，满足 (1.42)，并且弱可配称，它有配称列 $\Pi = (\pi_i)$. 并假定

$$\sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i) < +\infty. \tag{2.1}$$

自此以后，除非另有声明，我们的有势性都是关于这个满足 (2.1) 的配称列 (π_i) 而言的.

设方程(1.7)的极大线性无关解的个数是 m，$1 \leqslant m < +\infty$. 如同[6]中所述，这等价于说流出边界 $\mathfrak{B}$ 由 m 个点 $\omega^{(a)}(a = 1, 2, \cdots, m)$ 组成. 我们可选取(1.7)的 m 个线性独立解 $X_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$[7],[8]，使 X_λ^a 有相同的标准映像 X^a，并且

$$X_\lambda^a(i) \to \begin{cases} 1, & \text{当 } i \to \omega^{(a)} \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } i \to \omega^{(s)} \neq \omega^{(a)} \text{ 时}, \end{cases} \tag{2.2}$$

而且

$$0 < \bar{X} = \sum_{a=1}^{m} X^a, \tag{2.3}$$

$$0 < \bar{X}_\lambda = \sum_{a=1}^{m} X_\lambda^a, \tag{2.4}$$

$$\lambda P_\lambda^{\min} X^a = X^a - X_\lambda^a, \tag{2.5}$$

$$X_\lambda^a - X_\mu^a = (\mu - \lambda) P_\lambda^{\min} X_\mu^a = (\mu - \lambda) P_\mu^{\min} X_\lambda^a, \tag{2.6}$$

$$\lambda P_\lambda^{\min} X^0 = X^0, \qquad 0 \leqslant X^0 = 1 - \bar{X}, \tag{2.7}$$

假定 $\bar{X}_\lambda > 0$ 的依据是定理 1.8.

以后，我们也用 Π 表以 $\pi_i(i \in E)$ 为元素的对角矩阵. 这样做并不至于发生混淆. 命

$$\eta_\lambda^a = (\Pi X_\lambda^a)' = X_\lambda^{a'} \Pi, \tag{2.8}$$

$$\eta^a = (\Pi X^a)' = X^{a'} \Pi. \tag{2.9}$$

矩阵 A' 表 A 的转置. 特别，$X_\lambda^{a'}$ 是 X_λ^a 的转置.

引理 2.1　$\eta_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 线性独立，并且满足

(i) $\lambda \eta^a P_\lambda^{\min} = \eta^a - \eta_\lambda^a$, (2.10)

(ii) $\eta_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \eta - \eta Q = 0, \\ &0 \leqslant \eta, \sum_i \eta(i) < \infty \quad (\lambda > 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

的解.

证　由(2.1)知

$$\sum_i \eta_\lambda^a(i) = \sum_i \pi_i X_\lambda^a(i) \leqslant \sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i) < \infty. \tag{2.12}$$

又

$$\begin{aligned}\lambda\eta_\lambda^a - \eta_\lambda^a Q &= \lambda X_\lambda^{a\prime}\Pi - X_\lambda^{a\prime}\Pi Q \\ &= \lambda X_\lambda^{a\prime}\Pi - X_\lambda^{a\prime}Q'\Pi \quad (\text{由}Q\text{弱可配称}) \\ &= (\lambda X_\lambda^a - QX_\lambda^a)'\Pi = 0.\end{aligned}$$

故(ii)成立. 又由定理 1.2 知

$$\Pi P_\lambda^{\min} = (P_\lambda^{\min})'\Pi, \tag{2.13}$$

于是由(2.5)得

$$\begin{aligned}\lambda\eta^a P_\lambda^{\min} &= \lambda X^{a\prime}\Pi P_\lambda^{\min} = \lambda X^{a\prime}(P_\lambda^{\min})'\Pi = \lambda(P_\lambda^{\min}X^a)'\Pi \\ &= (X^a - X_\lambda^a)'\Pi = \eta^a - \eta_\lambda^a.\end{aligned}$$

此即是(2.10). 再由 X_λ^a 的线性独立(即 $\forall\lambda > 0$, 线性独立)知

$$\sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a \eta_\lambda^a = 0 \Rightarrow \forall i \in E, \quad \sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a \eta_\lambda^a(i) = 0 \Rightarrow \forall i \in E,$$

$$\sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a X_\lambda^a(i) = 0 \Rightarrow \sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a X_\lambda^a = 0 \Rightarrow \alpha_\lambda^1 = \alpha_\lambda^2 = \cdots = \alpha_\lambda^m = 0.$$

证毕.

我们使用 [7] 中的记号. 若 $u_1, \cdots, u_m$ 是数或向量, 则 $\{u\}_1^m$ 表以 $u^a(a = 1,2,\cdots, m)$ 为元素的列向量;而 $\{u\}_1^{m'}$ 表这个列向量的转置,即以 $u^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 为元素的行向量. 以 M^{ab} 为元素的矩阵用相应的大写德文字母 $\mathfrak{M}$ 表示.

由 Q 保守,每一 Q 过程满足向后方程,易见[8]

定理 2.1 每一 Q 过程形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \sum_{a=1}^m X_\lambda^a y_\lambda^a, \tag{2.14}$$

其中行向量 y_λ^a 满足

预解条件: $y_\lambda^a - y_\mu^a = (\mu - \lambda)y_\lambda^a P_\mu$, (2.15)

范条件: $0 \leqslant y_\lambda^a$, $\lambda \sum_j y_\lambda^a(j) \leqslant 1$. (2.16)

P_λ 不断,当且仅当

$$\lambda \sum_j y_\lambda^a(j) = 1 \qquad (\forall a, \forall\lambda > 0). \tag{2.17}$$

下面是有势 Q 过程的表现定理.

定理 2.2 设 Q 保守, $m(1 \leqslant m < \infty)$ 流出,再设 Q 弱可配称并且配称列满足(2.1),则每一个有势 Q 过程必定形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m \tag{2.18}$$

此处 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是某一非负对称 $m \times m$ 矩阵.

为证明定理 2.2,先证明一条简单引理.

引理 2.2 设 $\eta^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是任意 m 个线性无关的行向量, $V^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是 m 个列向量.如果

$$\sum_{a=1}^{m} V^a \eta^a = 0^{1)}, \tag{2.19}$$

则

$$V^a = 0 \qquad (a = 1, 2, \cdots, m). \tag{2.20}$$

证　由(2.19)得，对于每一个 i，

$$\sum_{a=1}^{m} v^a(i)\eta^a = 0. \tag{2.21}$$

于是由 η^a 的线性独立性知

$$v^a(i) = 0, \qquad a = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.22}$$

但 i 任意，故(2.20)成立．证毕．

定理 2.2 的证明　由定理 2.1 及[8，引理 1]知，在定理 2.2 的假设之下，每一 Q 过程形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{Z_\lambda\}_1^{l'} \mathfrak{N}_\lambda \{\xi_\lambda\}_1^{\bar{n}}. \tag{2.23}$$

此处 $Z_\lambda^a (a = 1, 2, \cdots, l)$ 是方程(1.7)的解，$\xi_\lambda^b (b = 1, 2, \cdots, \bar{n})$ 满足方程

$$\left.\begin{aligned} &\xi_\mu^b = \xi_\lambda^b A(\lambda, \mu), \\ &0 \leqslant \xi_\lambda^b, \quad \sum_i \xi_\lambda^b(i) < \infty, \quad (\lambda, \mu > 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

其中

$$A(\lambda, \mu) = I + (\lambda - \mu) P_\mu^{\min} \qquad (\lambda, \mu > 0), \tag{2.25}$$

而 $\mathfrak{N}_\lambda$ 是一个 $l \times \bar{n}$ 非负矩阵．当然，还要求 Z_λ^a 和 ξ_λ^b 满足其它一些条件．

现在，因为 $X_\lambda^a (a = 1, 2, \cdots, m)$ 是方程(1.7)的一组极大线性无关解，故存在一个 $l \times m$ 矩阵 $\mathfrak{N}_\lambda^1$，使得

$$\{Z_\lambda\}_1^{l'} = \mathfrak{N}_\lambda^1 \{X_\lambda\}_1^{m'}. \tag{2.26}$$

于是

$$\{Z_\lambda\}_1^{l'} = \{X_\lambda\}_1^{m'} \mathfrak{N}_\lambda^{1'}. \tag{2.27}$$

另一方面，由(2.6)知

$$X_\mu^a = A(\lambda, \mu) X_\lambda^a, \tag{2.28}$$

故

$$\eta_\mu^a = X_\mu^{a'} \Pi = X_\lambda^{a'} A'(\lambda, \mu) \Pi = X_\lambda^{a'} \Pi A(\lambda, \mu) = \eta_\lambda^a A(\lambda, \mu). \tag{2.29}$$

由此及(2.12)知，$\eta_\lambda^a (a = 1, 2, \cdots, m)$ 是方程(2.24)的解．方程

$$\left.\begin{aligned} &\eta_\mu = \eta_\lambda A(\lambda, \mu) \\ &\sum_i |\eta_\lambda(i)| < \infty \quad (\lambda, \mu > 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

的解显然构成一个向量空间 $\mathscr{L}$．由 $\{\eta_\lambda^a, \xi_\lambda^b : a = 1, 2, \cdots, m; b = 1, 2, \cdots, \bar{n}\}$ 张成一个子空间 $\mathscr{L}_0$．由于 $\eta_\lambda^a (a = 1, 2, \cdots, m)$ 线性无关，故可扩张成 $\mathscr{L}_0$ 的一组基，记作 $\{\eta_\lambda^a : a = 1, 2, \cdots, m, m+1, \cdots, n\}$．于是存在一个 $\bar{n} \times n$ 矩阵 $\mathfrak{N}_\lambda^2$，使得

---

1) 此处列向量与行向量的乘法，理解为矩阵乘法．

$$\{\xi_\lambda\}_1^{\bar{n}} = \mathfrak{N}_\lambda^2\{\eta_\lambda\}_1^n. \tag{2.31}$$

命

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda^{1\prime}\mathfrak{N}_\lambda\mathfrak{N}_\lambda^2, \tag{2.32}$$

则 (2.18) 成为

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{\eta_\lambda\}_1^n. \tag{2.33}$$

此处 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，$1 \leqslant m \leqslant n < +\infty$.

今记

$$\tilde{\eta}_\lambda^1 = \{\eta_\lambda\}_1^m, \quad \tilde{\eta}_\lambda^2 = \{\eta_\lambda\}_{m+1}^n, \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_\lambda^1 &= \begin{pmatrix} M_\lambda^{11} \cdots M_\lambda^{1m} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ M_\lambda^{m1} \cdots M_\lambda^{mm} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{M}_\lambda^2 &= \begin{pmatrix} M_\lambda^{1,m+1} \cdots M_\lambda^{1,n} \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ M_\lambda^{m,m+1} \cdots M_\lambda^{m,n} \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.35}$$

则

$$\{\eta_\lambda\}_1^n = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

$$\mathfrak{M}_\lambda = (\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2), \tag{2.37}$$

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}(\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2)\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

由 P_λ 和 $P_\lambda^{\min}$ 的有势性知

$$\Pi P_\lambda = P_\lambda'\Pi, \quad \Pi P_\lambda^{\min} = (P_\lambda^{\min})'\Pi. \tag{2.39}$$

于是

$$\{\Pi X_\lambda\}_1^{m'}(\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2)\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix} = ([\tilde{\eta}_\lambda^1]', [\tilde{\eta}_\lambda^2]')\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\lambda^{1\prime} \\ \mathfrak{M}_\lambda^{2\prime} \end{pmatrix}\{X_\lambda'\Pi\}_1^m. \tag{2.40}$$

此处

$$[\tilde{\eta}_\lambda^1]' = (\eta_\lambda^{1\prime}, \eta_\lambda^{2\prime}, \cdots, \eta_\lambda^{m\prime}). \tag{2.41}$$

$[\tilde{\eta}_\lambda^2]'$ 的意义类同. 于是由(2.7),(2.34)和(2.40)得

$$[\tilde{\eta}_\lambda^1]'(\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2)\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix} = ([\tilde{\eta}_\lambda^1]', [\tilde{\eta}_\lambda^2]')\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\lambda^{1\prime} \\ \mathfrak{M}_\lambda^{2\prime} \end{pmatrix}\tilde{\eta}_\lambda^1, \tag{2.42}$$

即

$$([\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^2)\tilde{\eta}_\lambda^2 = \{[\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^{1\prime} + [\tilde{\eta}_\lambda^2]'\mathfrak{M}_\lambda^{2\prime} - [\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^{1\prime}\}\tilde{\eta}_\lambda^1. \tag{2.43}$$

我们可将(2.43)表成

$$\sum_{b=m+1}^{n} V_\lambda^b\eta_\lambda^b = \sum_{a=1}^{m} V_\lambda^a\eta_\lambda^a, \tag{2.44}$$

其中 $V_\lambda^a (a = 1, 2, \cdots, n)$ 是 E 上的列向量. 于是由 $\eta_\lambda^a (a = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性无关性以及引理 2.2 知

$$V_\lambda^a = 0 \qquad (a = 1, 2, \cdots, n). \tag{2.45}$$

特别

$$[\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^2 = 0 \tag{2.46}$$

或即

$$\{\Pi X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda^2 = 0. \tag{2.47}$$

而这等价于

$$\{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda^2 = 0. \tag{2.48}$$

最后，由(2.38)得

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda^1\{\eta_\lambda\}_1^m. \tag{2.49}$$

无妨写成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{\eta_\lambda\}_1^m. \tag{2.50}$$

此处 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是一个 $m \times m$ 矩阵. 因为 P_λ 是一个 Q 过程，故由 (2.2) 和 (2.16) 易证 $\mathfrak{M}_\lambda$ 非负. 剩下的只须再证 $\mathfrak{M}_\lambda$ 对称.

记

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_\lambda', \tag{2.51}$$

则由 (2.50), (2.39), (2.34) 和 (2.7) 得

$$[\tilde{\eta}^1]'\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda\tilde{\eta}_\lambda^1 = 0. \tag{2.52}$$

即

$$\sum_{b=1}^m\left(\sum_{a=1}^m \widetilde{M}_\lambda^{ab}\eta_\lambda^{a'}\right)\eta_\lambda^b = 0. \tag{2.53}$$

由 $\eta_\lambda^b(b = 1, 2, \cdots, m)$ 的线性无关性和引理 2.2 知

$$\sum_{a=1}^m \widetilde{M}_\lambda^{ab}\eta_\lambda^{a'} = 0, \qquad b = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.54}$$

再用一次 $\eta_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 的线性无关性，即知

$$\widetilde{M}_\lambda^{ab} = 0, \qquad a, b = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.55}$$

故

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda'. \tag{2.56}$$

至此，定理证毕.

推论 2.1　设 Q 有势，且

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m. \tag{2.57}$$

是一个 Q 过程，其中 $X_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是方程(1.7)的一组线性无关解. $\mathfrak{M}_\lambda$ 是 $m \times m$ 矩阵，则 P_λ 成为有势 Q 过程(关于 Π) 的充要条件是 $\mathfrak{M}_\lambda$ 对称.

证　必要性在定理 2.1 证明的最后一部分中已证. 往证充分性. 若 $\mathfrak{M}_\lambda$ 对称，则由

$$(\{\Pi X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m)' = \{\Pi X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda'\{X_\lambda'\Pi\}_1^m = \{\Pi X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m \tag{2.58}$$

及 $\Pi P_\lambda^{\min} = (P_\lambda^{\min})'\Pi$ 立知 $\Pi P_\lambda = P_\lambda'\Pi$. 故 P_λ 有势. 证毕.

以后固定定理 2.2 中的 $\mathfrak{M}_\lambda$，并假定它相应的 P_λ 是一个有势 Q 过程. 我们的目的是要进一步刻划 $\mathfrak{M}_\lambda$ 的结构.

本文使用如下记号[7,8]:

$$U_\lambda^{ab} = \lambda\eta_\lambda^a X^b = \lambda\eta^a X_\lambda^b \qquad (a = 1, 2, \cdots, m), \tag{2.59}$$

$$\tau^a = \lambda\eta_\lambda^a X^0 \text{(与 } \lambda \text{ 无关!)} \qquad (a = 1, 2, \cdots, m), \tag{2.60}$$

$$\xi_\lambda^a = \sum_{b=1}^{m} M_\lambda^{ab}\eta_\lambda^b \qquad (a = 1, 2, \cdots, m), \tag{2.61}$$

则我们有

引理 2.3

(i) $U_\lambda^{ab} = U_\lambda^{ba}$; (2.62)

(ii) $U_\lambda^{ab} \uparrow U^{ab}(\leqslant +\infty)(\lambda \uparrow \infty)$; (2.63)

(iii) $U_\lambda^{ab} - U_\mu^{ab} = (\lambda - \mu)\langle\eta_\lambda^a, X_\mu^b\rangle$; (2.64)

此处

$$\langle\eta_\lambda^a, X_\mu^b\rangle = \sum_i \eta_\lambda^a(i)X_\mu^b(i); \tag{2.65}$$

(iv) $\sum_{b=1}^{m}\sum_{c=1}^{m} M_\lambda^{ab}U_\lambda^{bc} \leqslant 1.$ (2.66)

证 由 (2.5) 和 (2.10) 得

$$\begin{aligned} U_\lambda^{ab} &= \lambda\eta_\lambda^a X^b = \lambda X_\lambda^{a'}\Pi X^b = \lambda(X^{a'} - \lambda X^{a'}(P_\lambda^{\min})')\Pi X^b \\ &= \lambda X^{a'}(I - \lambda(P_\lambda^{\min})')\Pi X^b = \lambda X^{a'}(\Pi X^b - \lambda(P_\lambda^{\min})'\Pi X^b) \\ &= \lambda X^{a'}(\eta^b - \lambda\eta^b P_\lambda^{\min})' = \lambda X^{a'}\eta_\lambda^{b'} = \lambda\eta_\lambda^b X^a \\ &= U_\lambda^{ba}, \end{aligned} \tag{2.67}$$

故 (2.62) 成立. 又

$$\begin{aligned} &(\lambda - \mu)\langle\eta_\lambda^a, X_\mu^b\rangle \\ &= (\lambda - \mu)\langle\eta_\lambda^a, X^b - \mu P_\mu^{\min}X^b\rangle \\ &= (\lambda - \mu)\langle\eta_\lambda^a, X^b\rangle - \mu(\lambda - \mu)\langle\eta_\lambda^a, P_\mu^{\min}X^b\rangle \\ &= U_\lambda^{ab} - \mu\langle\eta_\lambda^a, X^b\rangle - \mu(\lambda - \mu)\langle\eta_\lambda^a P_\mu^{\min}, X^b\rangle \\ &= U_\lambda^{ab} - \mu[\langle\eta_\lambda^a + (\lambda - \mu)\eta_\lambda^a P_\mu^{\min}, X^b\rangle] \\ &= U_\lambda^{ab} - U_\mu^{ab}, \end{aligned} \tag{2.68}$$

故(2.63)和(2.64)成立. 最后,由(2.3)、(2.7)和定理 2.1 知

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{m}\sum_{c=1}^{m} M_\lambda^{ab}U_\lambda^{bc} &= \lambda\sum_{b=1}^{m}\sum_{c=1}^{m} M_\lambda^{ab}\langle\eta_\lambda^b, X^c\rangle \\ &= \lambda\sum_{b=1}^{m} M_\lambda^{ab}\langle\eta_\lambda^b, \bar{X}\rangle = \langle\lambda\xi_\lambda^a, \bar{X}\rangle \\ &\leqslant \langle\lambda\xi_\lambda^a, 1\rangle \leqslant 1. \end{aligned}$$

引理得证.

关于 ξ_λ^a 和 $\mathfrak{M}_\lambda$,我们有

引理 2.4

$$\xi_\lambda^a = \sum_{c=1}^{m}[\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle\xi_\lambda^a, X_\mu^c\rangle]\xi_\mu^c A(\mu, \lambda); \tag{2.69}$$

$$M_\lambda^{ab} = \sum_{c=1}^{m}[\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle\xi_\lambda^a, X_\mu^c\rangle]M_\mu^{cb} \tag{2.70}$$

www.cnki.net

$$= \sum_{c=1}^{m} \left[\delta_{ac} + \sum_{d=1}^{m} M_\lambda^{ad}(U_\mu^{dc} - U_\lambda^{dc})\right] M_\mu^{cb} \tag{2.71}$$

证　由 (2.15) 得

$$\xi_\lambda^a - \xi_\mu^a = (\mu - \lambda)\xi_\lambda^a \left[P_\mu^{\min} + \sum_{c=1}^{m} X_\mu^c \xi_\mu^c\right]$$

$$= (\mu - \lambda)\xi_\lambda^a P_\mu^{\min} + \sum_{c=1}^{m} (\mu - \lambda)\langle \xi_\lambda^a, X_\mu^c\rangle \xi_\mu^c,$$

于是

$$\sum_{c=1}^{m} [\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle \xi_\lambda^a, X_\mu^c\rangle]\xi_\mu^c = \xi_\lambda^a A(\lambda, \mu),$$

右乘 $A(\mu, \lambda)$，得

$$\xi_\lambda^a = \sum_{c=1}^{m} [\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle \xi_\lambda^a, X_\mu^c\rangle]\xi_\mu^c A(\mu, \lambda).$$

此即是(2.69). 由上式及(2.29)、(2.61)得

$$\sum_{b=1}^{m} M_\lambda^{ab}\eta_\lambda^b = \sum_{c=1}^{m} [\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle \xi_\lambda^a, X_\mu^c\rangle] \sum_{d=1}^{m} M_\mu^{cd}\eta_\mu^d A(\mu, \lambda)$$

$$= \sum_{c=1}^{m} [\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle \xi_\lambda^a, X_\mu^c\rangle] \sum_{d=1}^{m} M_\mu^{cd}\eta_\lambda^d,$$

然后由 η_λ^a 的线性独立性得 (2.70). 再由 (2.64) 得 (2.71).

当 $\mathfrak{A} < \infty$ 时，有势 Q 过程的构造十分简洁. 我们单独加以讨论.

定理 2.3　设 Q 保守、弱可配称，并且配称列 (π_i) 满足 (2.1). 再设 Q 为 m $(1 \leqslant m < \infty)$ 流出的，并且 $\mathfrak{A} < \infty$.

任意选择一个非负、对称的 $m \times m$ 矩阵 $\mathfrak{M}$，并定义 $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}$. 假定

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^m + \mathfrak{M}\{\tau\}_1^m \leqslant \{1\}_1^m, \tag{2.72}$$

并取

$$\mathfrak{M}_\lambda = (I - \mathfrak{S} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}, \tag{2.73}$$

则由 (2.73) 和 (2.18) 所定义的 P_λ 是一个有势 Q 过程. P_λ 不断的充要条件是(2.72) 中的等号成立. 并且一切(关于 Π 的)有势 Q 过程可用这种方式得到.

证　先证 $\mathfrak{M}_\lambda$ 对称等价于 $\mathfrak{M}$ 对称. 事实上，$\mathfrak{M}_\lambda$ 对称等价于

$$\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}\mathfrak{A}'\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda'\mathfrak{M}',$$

故由引理 2.3 立知它等价于 $\mathfrak{M}$ 对称.

次证范条件等价于 (2.72). 因为

$$\{\xi_\lambda\}_1^m = \mathfrak{M}_\lambda\{\eta_\lambda\}_1^m,$$

所以范条件等价于

$$\{1\}_1^m \geqslant \{\lambda\langle \xi_\lambda, 1\rangle\}_1^m = \mathfrak{M}_\lambda\{\lambda\langle \eta_\lambda, 1\rangle\}_1^m$$

$$= \mathfrak{M}_\lambda \left\{\lambda \left\langle \eta_\lambda, X^0 + \sum_{c=1}^{m} X^c \right\rangle\right\}_1^m = \mathfrak{M}_\lambda\{\tau\}_1^m + \mathfrak{M}_\lambda\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_1^m,$$

即

$$(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}(\{\tau\}_1^m+\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_1^m)\leqslant\{1\}_1^m$$

或

$$\mathfrak{M}(\{\tau\}_1^m+\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_1^m)\leqslant(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)\{1\}_1^m,$$

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^m+\mathfrak{M}\{\tau\}_1^m\leqslant\{1\}_1^m.$$

此即是 (2.72).

现在，如果 P_λ 是任一有势 Q 过程，则由定理 2.2，它必定形如(2.18). 于是由(2.70)知

$$0\leqslant\mathfrak{M}_\lambda\downarrow\qquad(\lambda\uparrow\infty).\tag{2.74}$$

记

$$\mathfrak{M}=\lim_{\lambda\to\infty}\mathfrak{M}_\lambda,\tag{2.75}$$

$\mathfrak{M}_\lambda$ 和 $\mathfrak{M}$ 都是对称的 $m\times m$ 矩阵. 由假设 $\mathfrak{A}<\infty$，在 (2.71) 中命 $\mu\to\infty$，得

$$\mathfrak{M}_\lambda=(I+\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_\lambda))\mathfrak{M}$$

或

$$\mathfrak{M}_\lambda\cdot(I-\mathfrak{A}\mathfrak{M}+\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{M})=\mathfrak{M},$$

由对称性得

$$(I-\mathfrak{M}\mathfrak{A}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\lambda=\mathfrak{M}.\tag{2.76}$$

如果 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的某一行和为零，则 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ 的同一行和也是零(注意，若 $\exists\lambda>0$，使 $U_\lambda^{ab}=0$，则 $\forall\lambda>0$，$U_\lambda^{ab}=0$)，故 $I-\mathfrak{M}\mathfrak{A}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的这一行和为 1 而大于零. 如果 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的某一行和大于零，则由范条件易见 $I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的同一行和不小于 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的这一行和而大于零. 因此，$I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的每一行和严格大于零. 另一方面，这个矩阵的非对角线元素非正. 故它有非负逆矩阵，于是 $\mathfrak{M}_\lambda$ 形如 (2.73)，必要性得证. 为证充分性，只须再证 ξ_λ^a 满足预解条件(2.15). 为此，先证 $\mathfrak{M}_\lambda$ 满足矩阵方程

$$\mathfrak{M}_\lambda-\mathfrak{M}_\mu=\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}_\mu-\mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\mu.\tag{2.77}$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}_\mu-\mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\mu\\&=(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_\mu-\mathfrak{A}_\lambda)(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)^{-1}\mathfrak{M}\\&=(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}[(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)-(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)]\\&\quad\cdot(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)^{-1}\mathfrak{M}\\&=(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}-(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)^{-1}\mathfrak{M}\\&=\mathfrak{M}_\lambda-\mathfrak{M}_\mu.\end{aligned}\tag{2.78}$$

其次，由 (2.24)

$$(\mu-\lambda)\xi_\lambda^aP_\mu=(\mu-\lambda)\xi_\lambda^a\left(P_\mu^{\min}+\sum_{c=1}^m X_\mu^c\xi_\mu^c\right)$$

$$=(\mu-\lambda)\xi_\lambda^aP_\mu^{\min}+\sum_{c=1}^m(\mu-\lambda)\langle\xi_\lambda^a,X_\mu^c\rangle\xi_\mu^c$$

$$=\sum_{t=1}^m M_\lambda^{at}\eta_\lambda^t(\mu-\lambda)P_\mu^{\min}+\sum_{c=1}^m\sum_{b=1}^m M_\lambda^{ab}(U_\mu^{bc}-U_\lambda^{bc})$$

$$\cdot\sum_{t=1}^m M_\mu^{ct}\eta_\mu^t$$

$$= \sum_{t=1}^{m} M_\lambda^{at}(\eta_\lambda^t - \eta_\mu^t) + \sum_{t=1}^{m} (M_\lambda^{at} - M_\mu^{at})\eta_\mu^t$$

$$= \sum_{t=1}^{m} M_\lambda^{at}\eta_\lambda^t - \sum_{t=1}^{m} M_\mu^{at}\eta_\mu^t$$

$$= \xi_\lambda^a - \xi_\mu^a,$$

预解条件(2.15)成立. 定理证毕.

§3. 有限流出有势 Q 过程的构造(续)

本节继续 §2，讨论 $\mathfrak{A}$ 含有无穷元时有势 Q 过程的构造问题. 此时问题要复杂得多. 已有的结果均不大适用于有势性的研究. 因此，我们直接给出具体的构造. 显然下面的定理也适用于 $\mathfrak{A}$ 有限的情形，但它显得冗长. 因此我们宁愿在上一节单独加以处理.

首先注意，如果(2.18)的 P_λ 是一个有势 Q 过程，并且有两个 ξ_λ^a 相等（此时称 $\{\xi_\lambda^a\}$ 是累赘的，否则称为非累赘的），例如 $\xi_\lambda^1 = \xi_\lambda^2$，则我们可将 X_λ^1 和 X_λ^2 去掉，代之以 $X_\lambda^1 + X_\lambda^2$，并取新的 ξ_λ^1 为原来的 $\xi_\lambda^1 = \xi_\lambda^2$，而将问题化成只有 $m-1$ 个边界的情况. 一般地，我们可将 $\omega^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 合并成 $\tilde{\omega}^a(a \in A)$. 其个数 $|A| \leqslant m$. $X_\lambda^a(a \in A)$ 仍然满足 §2 开头的一切条件.

设 $\bar{A} \subset A$，$\bar{A}$ 中元记作 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \cdots$.

定理 3.1　设 Q 保守、弱可配称，并且配称列 (π_i) 满足(2.1). 再设 Q 是 $m(1 \leqslant m < +\infty)$ 流出的，而 $\bigcup_{a \in A} \tilde{\omega}^a$ 是它的流出边界的任意一个不交划分，$|A| \leqslant m$.

任取 $\bar{A} \subset A$. 选择一个 $A \times \bar{A}$ 上的矩阵 $\mathfrak{G}$，使得

$$G^{\bar{a}\bar{a}} = 1 \quad (\bar{a} \in \bar{A}), \qquad \sum_{\bar{a} \in \bar{A}} G^{a\bar{a}} \leqslant 1 \quad (a \in A), \tag{3.1}$$

选择 $\bar{A} \times A$ 上的随机矩阵 $\mathfrak{N}$

$$N^{\bar{a}b} \geqslant 0 \quad (\bar{a} \in \bar{A}, b \in A), \qquad \sum_{b \in A} N^{\bar{a}b} = 1 \quad (\bar{a} \in \bar{A}) \tag{3.2}$$

及 $\bar{A} \times A$ 上的有限矩阵 $\mathfrak{S}$，使

$$+\infty > -S^{\bar{a}c} \geqslant \sum_{t \in A} N^{\bar{a}t} U^{tc} \qquad (c \neq \bar{a} \in \bar{A}, c \in A), \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}} \geqslant \mathfrak{N}[\{\tau\}_A + \mathfrak{A}(\{1\}_A - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}})], \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'[\mathfrak{G}'(\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{N}' + \mathfrak{S}')]^{-1}\mathfrak{G}'. \tag{3.5}$$

此处约定 $0 \cdot \infty = 0$. $\{u\}_A$ 表 A 上元素为 u^a 的列向量. 如果 $\mathfrak{A}$ 的第 c 列全有限，则(3.3)对这个 c 和所有的 $\bar{a} \in \bar{A}$，$\bar{a} \neq c$ 成立等号. 最后，取

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}, \tag{3.6}$$

则由(3.6)和(2.18)所定义的 P_λ 是一个有势 Q 过程. 反之，每一个有势 Q 过程可以用这种方式得到. 过程不断的充要条件是

$$\sum_{\bar{a} \in \bar{A}} G^{a\bar{a}} = 1 \qquad (a \in A), \tag{3.7}$$

且

$$\mathfrak{S}\{1\}_A = \mathfrak{N}\{\tau\}_A. \tag{3.8}$$

证 (I) 必要性

设 P_λ 是一个有势 Q 过程，不失一般性可设 $\{\xi_\lambda^a\}$ 非累赘. 我们证明必定存在 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ 和 $\mathfrak{S}$, 使之满足(3.1)—(3.6).

首先，由定理 2.2，每一个有势 Q 过程必定形如 (2.18). 因此，可用 (2.61) 定义 $\xi_\lambda^a (a \in A)$，它满足(2.15)，(2.16)、引理 2.3 和引理 2.4. 今设 $\lambda > 0$ 固定，由于集 $\{0\} \cup \{\xi_\lambda^a, a \in A\}$ 的凸包是 l' 中的紧凸集，它的极点可以记作 $\{0\} \cup \{\xi_\lambda^{\bar{a}} \neq 0, \bar{a} \in \bar{A}\}$. 由 Krein-Milman 定理 (Banach 空间的紧凸集是它的极点的凸包)，每一个 $\xi_\lambda^a (a \in A)$ 可以表成

$$\xi_\lambda^a = \sum_{\bar{a} \in \bar{A}} G^{a\bar{a}} \xi_\lambda^{\bar{a}}. \tag{3.9}$$

此处 $G^{a\bar{a}} \geqslant 0$, $G^{\bar{a}\bar{a}} = 1$ $(\bar{a} \in \bar{A})$，并且 $\sum_{\bar{a} \in \bar{A}} G^{a\bar{a}} \leqslant 1 (a \in A)$. 严格地说，(3.9) 中的 $\mathfrak{G}$ 依赖于 $\lambda > 0$. 但我们可以对任一 $\lambda > 0$ 取定. 因为(3.9)的两边右乘 $I + (\lambda - \mu)P_\mu$ 可得

$$\xi_\mu^a = \sum_{\bar{a} \in \bar{A}} G^{a\bar{a}} \xi_\mu^{\bar{a}} \qquad (\forall \mu > 0). \tag{3.10}$$

命

$$N_\lambda^{\bar{a}b} = \frac{M_\lambda^{\bar{a}b}}{\sum\limits_b M_\lambda^{\bar{a}b}} \qquad (\bar{a} \in \bar{A}, b \in A, \lambda > 0), \tag{3.11}$$

由 $\xi_\lambda^{\bar{a}} \neq 0$ 易见 $\sum_b M_\lambda^{\bar{a}b} \neq 0$，从而上式有定义. 由上式知 $\sum_{b \in A} N_\lambda^{\bar{a}b} = 1$，故使用对角线程序，我们可以取子列 $\lambda_n \to \infty$，使

$$0 \leqslant N_\lambda^{\bar{a}b} \to N^{\bar{a}b}, \quad \sum_{b \in A} N^{\bar{a}b} = 1. \tag{3.12}$$

由(2.71)得

$$\begin{aligned} M_\lambda^{\bar{a}b} &= \sum_{c \in A} \left[\delta_{\bar{a}c} + \sum_{d \in A} M_\lambda^{\bar{a}d} (U_\mu^{dc} - U_\lambda^{dc}) \right] M_\mu^{cb} \\ &= \sum_{c \in A} \sum_{d \in A} M_\lambda^{\bar{a}d} U_\mu^{dc} M_\mu^{cb} + \sum_{c \in A} \left[\delta_{\bar{a}c} - \sum_{d \in A} M_\lambda^{\bar{a}d} U_\lambda^{dc} \right] M_\mu^{cb} \\ &\qquad (\bar{a} \in \bar{A}, b \in A) \end{aligned} \tag{3.13}$$

命

$$S_\lambda^{\bar{a}c} = \frac{\delta_{\bar{a}c} - \sum\limits_{d \in A} M_\lambda^{\bar{a}d} U_\lambda^{dc}}{\sum\limits_{b \in A} M_\lambda^{\bar{a}b}} \qquad (\bar{a} \in \bar{A}, c \in A), \tag{3.14}$$

则

$$N_\lambda^{\bar{a}b} = \sum_c \sum_d N_\lambda^{\bar{a}d} U_\mu^{dc} M_\mu^{cb} + \sum_c S_\lambda^{\bar{a}c} M_\mu^{cb}, \qquad (\bar{a} \in \bar{A}, b \in A), \tag{3.15}$$

从 $\{\lambda_n\}$ 中抽子列 $\{\lambda_n'\}$，使得 $\mathfrak{S}_\lambda$ 收敛于某个 $\mathfrak{S}$. 往证这样的 $\mathfrak{S}$ 总是有限的. 事实上，若存在 $\bar{a} \in \bar{A}$，使 $S^{\bar{a}\bar{a}} = 0$，则由 (2.66) 得

$$0 \leqslant -S^{\bar{a}c} = \lim_{\lambda'_n\to\infty} \frac{\sum_d M^{\bar{a}d}_{\lambda'_n} U^{dc}_{\lambda'_n}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda'_n}} \leqslant \lim_{\lambda'_n\to\infty} \frac{\sum_{c\neq d}\sum_d M^{\bar{a}d}_{\lambda'_n} U^{dc}_{\lambda'_n}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda'_n}}$$

$$\leqslant \lim_{\lambda'_n\to\infty} \frac{\delta_{\bar{a}\bar{a}} - \sum_d M^{\bar{a}d}_{\lambda'_n} U^{d\bar{a}}_{\lambda'_n}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda'_n}} = S^{\bar{a}\bar{a}} = 0, \qquad (\forall c \in A).$$

若 $S^{\bar{a}\bar{a}} \neq 0$，则充分大的 λ'_n，$S^{\bar{a}\bar{a}}_{\lambda'_n} \neq 0$. 对于这样的 λ，命

$$T^{\bar{a}b}_\lambda = -S^{\bar{a}b}_\lambda / S^{\bar{a}\bar{a}}_\lambda, \qquad b \neq \bar{a} \tag{3.16}$$

此时

$$\sum_{b\neq\bar{a}} T^{\bar{a}b}_\lambda = -\sum_{b\neq\bar{a}} S^{\bar{a}b}_\lambda / S^{\bar{a}\bar{a}}_\lambda$$

$$= \frac{\sum_{c\neq\bar{a}}\sum_t M^{\bar{a}t}_\lambda U^{tc}_\lambda}{\sum_b M^{\bar{a}b}_\lambda} \Big/ \frac{1 - \sum_t M^{\bar{a}t}_\lambda U^{t\bar{a}}_\lambda}{\sum_b M^{\bar{a}b}_\lambda} \leqslant 1.$$

因此，我们可从 $\{\lambda'_n\}$ 抽子列 $\{\lambda''_n\}$，使

$$T^{\bar{a}b}_{\lambda''_n} \to T^{\bar{a}b} \geqslant 0, \quad \sum_{b\neq\bar{a}} T^{\bar{a}b} \leqslant 1, \qquad \bar{a} \in \bar{A}. \tag{3.17}$$

如果 $S^{\bar{a}\bar{a}} = \infty$，则用 $S^{\bar{a}\bar{a}}_{\lambda''_n}$（充分大的 λ''_n）除(3.15)两边，固定 μ 并命 $\lambda''_n \to \infty$，

便得

$$M^{\bar{a}b}_\mu = \sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} M^{cb}_\mu \qquad (b \in A). \tag{3.18}$$

于是

$$\xi^{\bar{a}}_\mu = \sum_b M^{\bar{a}b}_\mu \eta^b_\mu = \sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} \sum_b M^{cb}_\mu \eta^b_\mu = \sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} \xi^c_\mu$$

$$= \sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} \sum_{\bar{e}} G^{c\bar{e}} \xi^{\bar{e}}_\mu = \sum_{\bar{e}} \Big(\sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{e}} \Big) \xi^{\bar{e}}_\mu.$$

若 $\sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} < 1$，则由上式得

$$\xi^{\bar{a}}_\mu = \sum_{\bar{e}\neq\bar{a}} \Big[\Big(\sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{e}} \Big) \Big/ \Big(1 - \sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} \Big) \Big] \xi^{\bar{e}}_\mu.$$

但

$$\sum_{\bar{e}\neq\bar{a}} \Big[\Big(\sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{e}} \Big) \Big/ \Big(1 - \sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} \Big) \Big] \leqslant 1,$$

故这与假设 $\xi^{\bar{a}}_\mu$ 为极点矛盾. 因此可设

$$\sum_{c\neq\bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} = 1.$$

由此及 (3.17) 知 $G^{c\bar{a}} = 1$, $\forall c \neq \bar{a}$. 进而 $G^{c\bar{a}} = 1$, $\forall c$. 于是 $G^{c\bar{e}} = 0$, $\forall \bar{e} \neq \bar{a}$, $\forall c$. 这表明 $\forall c \in A$,

www.cnki.net

$$\xi_\lambda^c = \sum_{\bar{e}} G^{c\bar{e}}\xi_\lambda^{\bar{e}} = \xi_\lambda^{\bar{a}}.$$

这与 P_λ 非累赘假设相悖. 至此,我们证得 $\mathfrak{S}$ 有限.

在(3.15)中命 λ 沿 $\{\lambda_n''\}$ 趋于 ∞,得

$$\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{M}_\mu = (\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}\bar{\mathfrak{M}}_\mu. \tag{3.19}$$

此处 $\bar{\mathfrak{M}}$ 表 $\mathfrak{M}$ 在 $\bar{A}\times A$ 上的限制. 往证矩阵 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 可逆. 先证它的非对角线元素非正. 事实上,由

$$\begin{aligned}
&\sum_c \left[\sum_t M_\lambda^{\bar{a}t}(U_\mu^{tc} - U_\lambda^{tc}) + \delta_{\bar{a}c}\right] G^{c\bar{e}} \\
&\quad = \sum_c \sum_t M_\lambda^{\bar{a}t}(U_\mu^{tc} - U_\lambda^{tc})G^{c\bar{e}} + G^{\bar{a}\bar{e}} \\
&\quad \leqslant 0 \qquad (\bar{a} \neq \bar{e},\ \mu \leqslant \lambda)
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
&[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{\bar{a}\bar{e}} \\
&= \lim_{\lambda_n''\to\infty} \sum_c \left(\sum_t N_\lambda^{\bar{a}t}U_\mu^{tc} + S_\lambda^{\bar{a}c}\right) G^{c\bar{e}} \\
&= \lim_{\lambda_n''\to\infty} \left(\sum_b M_\lambda^{\bar{a}b}\right)^{-1}\left[\sum_t M_\lambda^{\bar{a}t}U_\mu^{tc} + \delta_{\bar{a}c} - \sum_t M_\lambda^{\bar{a}t}U_\lambda^{tc}\right] G^{c\bar{e}} \\
&\leqslant 0 \qquad (\bar{a} \neq \bar{e}).
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bar{e}} [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}}\lambda\langle\xi_\lambda^{\bar{e}},\ 1\rangle \\
&\quad = \sum_{\bar{e}} [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}}\,\lambda \sum_t M_\lambda^{\bar{e}t}\langle\eta_\lambda^t,\ 1\rangle \\
&\quad = \lambda \sum_t N^{\bar{a}t}\langle\eta_\lambda^t,\ 1\rangle (\text{由}(3.19)),
\end{aligned}$$

由于 $\forall t$, $\lambda\langle\eta_\lambda^t, 1\rangle > 0$, $\forall \bar{a}$, $\sum_t N^{\bar{a}t} = 1$, 所以

$$\sum_{\bar{e}} [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}}\lambda\langle\xi_\lambda^{\bar{e}},\ 1\rangle > 0. \tag{3.20}$$

这样,以

$$[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}}\lambda\langle\xi_\lambda^{\bar{e}},\ 1\rangle$$

为元素的矩阵可逆,并且逆矩阵非负. 进而 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 有非负逆矩阵. 于是由 (3.19) 得到

$$\bar{\mathfrak{M}}_\lambda = [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}, \tag{3.21}$$

进而

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{G}\bar{\mathfrak{M}}_\lambda = \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}. \tag{3.22}$$

由(3.11)和(3.14),知,当 $c \neq \bar{a}$ 时,

$$-S_\lambda^{\bar{a}c} = \sum_{d\in A} N_\lambda^{\bar{a}d}U_\lambda^{dc},$$

故当 $\lambda_n'' \to \infty$ 时,应有

$$+\infty > -S^{\bar{a}c} \geqslant \sum_{d\in A} N^{\bar{a}d}U^{dc}.$$

此处“$\geqslant$”是因约定了 $0\cdot\infty=0$. 如果 $\mathfrak{A}$ 的 c 列元素有限，则上式应成立等号.

在定理 2.3 证明的开头，我们已经说明范条件等价于

$$\mathfrak{M}_\lambda(\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A) \leqslant \{1\}_A, \tag{3.23}$$

由此立知

$$\bar{\mathfrak{M}}_\lambda(\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A) \leqslant \{1\}_{\bar{A}}. \tag{3.24}$$

反之，若(3.24)成立，则两边左乘 $\mathfrak{G}$，便知(3.23)成立. 故范条件也等价于(3.24). 进而，它又等价于

$$[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}(\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A) \leqslant \{1\}_{\bar{A}}$$

或

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}} \geqslant \mathfrak{N}[\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda(\{1\}_A - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}})].$$

命 $\lambda\to\infty$，即知范条件等价于 (3.4).

显然，$\mathfrak{M}_\lambda$ 对称等价于(3.5)成立.

最后由前段所证，过程不断的充要条件是

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}} = \mathfrak{N}[\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda(\{1\}_A - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}})].$$

若过程不断，则由(2.17)和(3.9)易见，首先必须(3.7)成立. 于是由上式知(3.8)成立. 反之，若(3.7)和(3.8)成立，则上式成立. 故过程不断. 至此，必要性证毕.

(II) 充分性

范条件和 $\mathfrak{M}_\lambda$ 的对称性在必要性部分已经证明. 故我们只须再证明在定理的条件下矩阵 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 可逆，并且 P_λ 满足预解条件.

由(3.3)知

$$-\sum_{c\neq\lambda} S^{\bar{a}c}G^{c\bar{e}} \geqslant \sum_{c\neq\lambda}\sum_{t\in A} N^{\bar{a}t}U^{tc}G^{c\bar{e}}.$$

注意到 $G^{\bar{a}\bar{e}} = 0$ $(\bar{a}\neq\bar{e})$，便得

$$-\sum_{c} S^{\bar{a}c}G^{c\bar{e}} \geqslant \sum_{c}\sum_{t} N^{\bar{a}t}U^{tc}G^{c\bar{e}}$$

$$\geqslant \sum_{c}\sum_{t} N^{\bar{a}t}U^{tc}_\lambda G^{c\bar{e}} \qquad (\bar{a}\neq\bar{e}).$$

此即表明矩阵 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 的非对角线元素非正. 另一方面，由 (3.4)、(3.2) 及 $\mathfrak{A}_\lambda$ 的对角线元素大于零知

$$\begin{aligned}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}} &= \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}} + \mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}}\\ &\geqslant \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}} + \mathfrak{N}\{\tau\}_A + \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda(\{1\}_A - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}})\\ &= \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A + \mathfrak{N}\{\tau\}_A \geqslant \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A > 0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

故 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 可逆.

由定理 2.3 的证明中可见，为验证 P_λ 满足预解条件，我们只须证明 $\mathfrak{M}_\lambda$ 满足方程 (2.77). 现在，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}_\mu - \mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\mu\\ &\quad= \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_\mu - \mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}\end{aligned}$$

$$= \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$$
$$- (\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}][(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}$$
$$= \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N} - \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}$$
$$= \mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_\mu. \tag{3.26}$$

定理证毕.

对于不断情形，定理 2.4 可以叙述得更为简洁. 因为 $\sum_{\bar{a}\in\bar{A}} G^{a\bar{a}} = 1 \quad (a \in A)$，故

$$\sum_{a\in A} X_\lambda^a \xi_\lambda^a = \sum_{a\notin\bar{A}} X_\lambda^a \xi_\lambda^a + \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} X_\lambda^{\bar{a}} \xi_\lambda^{\bar{a}} = \sum_{a\notin\bar{A}} X_\lambda^a \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} G^{a\bar{a}} \xi_\lambda^{\bar{a}} + \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} X_\lambda^{\bar{a}} \xi_\lambda^{\bar{a}}$$
$$= \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} \left[X_\lambda^{\bar{a}} + \sum_{a\notin\bar{A}} X_\lambda^a G^{a\bar{a}} \right] \xi_\lambda^{\bar{a}}.$$

若命

$$\tilde{X}_\lambda^{\bar{a}} = X_\lambda^{\bar{a}} + \sum_{a\notin\bar{A}} X_\lambda^a G^{a\bar{a}} \qquad (\bar{a} \in \bar{A}), \tag{3.27}$$

则 $\tilde{X}_\lambda^{\bar{a}} (\bar{a} \in \bar{A})$ 也满足 §2 开头的全部条件. 即它也是一族逗留解. 另一方面，由

$$\xi_\lambda^a = \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} G^{a\bar{a}} \xi_\lambda^{\bar{a}} \qquad (a \in A)$$

导出

$$M_\lambda^{ab} = \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} G^{a\bar{a}} M_\lambda^{\bar{a}b} \qquad (a, b \in A).$$

再由 $\mathfrak{M}_\lambda$ 的对称性得

$$M_\lambda^{ba} = \sum_{\bar{a}\in\bar{A}} G^{a\bar{a}} M_\lambda^{b\bar{a}} \qquad (a, b \in A).$$

于是

$$\xi_\lambda^{\bar{a}} = \sum_{c\in A} M_\lambda^{\bar{a}c} \eta_\lambda^c = \sum_{\bar{c}\in\bar{A}} M_\lambda^{\bar{a}\bar{c}} \eta_\lambda^{\bar{c}} + \sum_{c\notin A} M_\lambda^{\bar{a}c} \eta_\lambda^c$$
$$= \sum_{\bar{c}\in\bar{A}} M_\lambda^{\bar{a}\bar{c}} \eta_\lambda^{\bar{c}} + \sum_{c\notin\bar{A}} \left(\sum_{\bar{c}\in\bar{A}} G^{c\bar{c}} M_\lambda^{\bar{a}\bar{c}} \right) \eta_\lambda^c$$
$$= \sum_{\bar{c}\in\bar{A}} M_\lambda^{\bar{a}\bar{c}} \left[\eta_\lambda^{\bar{c}} + \sum_{c\notin A} G^{c\bar{c}} \eta_\lambda^c \right].$$

若命

$$\tilde{\eta}_\lambda^{\bar{a}} = \eta_\lambda^{\bar{a}} + \sum_{a\notin\bar{A}} G^{a\bar{a}} \eta_\lambda^a \qquad (\bar{a} \in \bar{A}), \tag{3.28}$$

则

$$\tilde{\eta}_\lambda^{\bar{a}} = \tilde{X}_\lambda^{\bar{a}} \Pi \qquad (\bar{a} \in \bar{A}) \tag{3.29}$$

也满足我们的要求，并且 P_λ 可表成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \sum_{c\in\bar{A}} \sum_{c\in\bar{A}} M_\lambda^{\bar{a}\bar{b}} \tilde{X}_\lambda^{\bar{a}} \tilde{\eta}_\lambda^{\bar{b}}, \tag{3.30}$$

并且

$$\tilde{\xi}_\lambda^{\bar{a}} = \xi_\lambda^{\bar{a}} = \sum_{\bar{c}\in\bar{A}} M_\lambda^{\bar{a}\bar{c}} \tilde{\eta}_\lambda^{\bar{c}}. \tag{3.31}$$

www.cnki.net

这就化成了 $A=\bar{A}$，且 $\mathfrak{G}$ 为单位矩阵的情形. 因此，不失一般性，可取 $\mathfrak{G}$ 为单位矩阵. 由此不难证明

定理 3.2 设 Q 保守、弱可配称，并且配称列 (π_i) 满足(2.1). 再设 Q 是 $m(1\leqslant m<\infty)$ 流出的. 任取流出边界的一个不交划分，使边界分为 $|A|\leqslant m$ 个部分.

选择 $A\times A$ 上的一个随机矩阵 $\mathfrak{M}$，

$$M^{ab}\geqslant 0 \quad (a,b\in A), \qquad \sum_b M^{ab}=1 \quad (a\in A), \tag{3.32}$$

选择 $A\times A$ 上一个有限矩阵 $\mathfrak{S}$，使

$$+\infty>-S^{ab}\geqslant \sum_{l\in A} M^{al}U^{lb} \quad (a\neq b), \tag{3.33}$$

$$\mathfrak{S}\{1\}_A=\mathfrak{M}\{\pi_A\}, \tag{3.34}$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}\mathfrak{M}'. \tag{3.35}$$

此处约定 $0\cdot\infty=0$. 如果 $\mathfrak{A}$ 的第 b 列全有限，则对于这个 b 和一切 a，(3.33) 式取等号. 最后，取

$$\mathfrak{M}_\lambda=(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{S})^{-1}\mathfrak{M}, \tag{3.36}$$

则由(3.36)和(2.18)所定义的 P_λ 是一个不断的有势 Q 过程. 反之，每一个不断的有势 Q 过程可用这种方式得到.

§4. 可配称、可逆 Q 过程

本节继续 §2 和 §3，讨论有限流出可配称、可逆 Q 过程的构造.

我们注意，当 Q 可配称时，条件(2.1)自然满足. 因此，将定理 2.3、定理 3.1 和定理 3.2 中的“有势”换成“可配称”，便得到可配称 Q 过程的构造定理. 这里不再重述.

下面讨论可逆 Q 过程.

对于给定的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$，称 i 直达 j，如果 $q_{ij}>0$. 记作 $i\to j$. 如果存在 E 中的 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，使 $i\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_k\to j$，则称 i 可达 j，并记作 $i\rightsquigarrow j$. 如果 $i\rightsquigarrow j$，且 $j\rightsquigarrow i$，则称 i 与 j 互达，并记作 $i\leftrightsquigarrow j$. 设 $Q=(q_{ij})$ 零同，即

$$q_{ij}=0\Leftrightarrow q_{ji}=0, \qquad \forall i,j\in E. \tag{4.1}$$

定义等价关系 $\sim$：

$$i\sim j \text{ 当且仅当 } i\leftrightsquigarrow j \text{ 或 } i=j. \tag{4.2}$$

依此关系将 E 分成等价类 $(E_l:l\in D)$，使得对于每一对 $i,j\in E_l$，$i\neq j$，有 $i\leftrightsquigarrow j$. Q 限于 E_l 得 Q_l. 它也是一个 Q 矩阵，称为 Q 的子块. 如果 $|D|=1$，即只有一块，则称 Q 是既约的；否则称为可约的.

定理 4.1 设 Q 是保守 Q 矩阵，并且是 $m(0\leqslant m<\infty)$ 流出的. 那么

(i) 若 $m=0$，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 既约、可配称，而在 Q 既约、可配称时，唯一的可逆 Q 过程是最小 Q 过程.

(ii) 若 $m=1$，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 既约、可配称. 而在 Q 既约、可配称时，唯一的可逆 Q 过程是

$$P_{ij}(\lambda) = P_{ij}^{\min}(\lambda) + \bar{X}_\lambda(i)\pi_j\bar{X}_\lambda(j) \Big/ \lambda \sum_k \pi_k\bar{X}_\lambda(k). \tag{4.3}$$

(iii) 若 $m > 1$，且 Q 既约，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称. 而在 Q 可配称时，定理 3.2 所构造的每一个可配称 Q 过程都是可逆 Q 过程，并且每一个可逆 Q 过程可以用这种方式得到.

(iv) 若 $m > 1$，且 Q 可约，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称，且 Q 的每一子块非零流出. 而在条件满足时，则定理 3.2 所构造的每一个可配称 Q 过程，只要满足

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in A} M_\lambda^{ab}\pi_j X_\lambda^a(i)X_\lambda^b(j) > 0 \qquad \forall i \in E_l,\ \forall j \notin E_l,\ \forall l \in D \tag{4.4}$$

就是一个可逆 Q 过程. 并且每一个可逆 Q 过程可以用这种方式得到.

证

(i) 见[4].

(ii) 见[2；定理 2.6.3 和定理 2.6.4].

(iii) 前一项断言由定理 1.7 推出，往证后一项断言. 注意 Q 既约，故由 [3; 系 3.5.1] 易证，对于每一对 $i, j \in E$，

$$P_{ij}^{\min}(\lambda) > 0. \tag{4.5}$$

于是

$$P_\lambda \geqslant P_\lambda^{\min} > 0. \tag{4.6}$$

由此及 P_λ 的可配称性即知 P_λ 可逆([4，命题 2.2]).

(iv) 前一项断言也由定理 1.7 推出，往证后一项断言. 限于每一个子块 Q_l，Q_l 既约，故与 (iii) 一样，有

$$P_{ij}^{\min}(\lambda) > 0, \qquad \forall i, j \in E_l,\ \forall l \in D. \tag{4.7}$$

于是

$$P_{ij}(\lambda) \geqslant P_{ij}^{\min}(\lambda) > 0, \qquad \forall i, j \in E_l,\ \forall l \in D. \tag{4.8}$$

又由(4.4)及 $P_{ij}^{\min}(\lambda) = 0$，$i \in E_l$，$j \notin E_l$，$l \in D$ ([3;定理 4.2.1]) 知

$$P_{ij}(\lambda) = \sum_a\sum_b M_\lambda^{ab}\pi_j X_\lambda^a(i)X_\lambda^b(j) > 0, \tag{4.9}$$
$$\forall i \in E_l,\ \forall j \notin E_l,\ \forall l \in D.$$

故

$$P_{ij}(\lambda) > 0,\ \forall i, j \in E. \tag{4.10}$$

于是与 (iii) 一样证得 P_λ 可逆，定理证毕.

命题 4.1 在定理 4.1 的 (iv) 中，如果

$$\mathfrak{M}_\lambda > 0, \tag{4.11}$$

则条件(4.4)满足.

证 由 (iv) 中假设知

$$\bar{X}_\lambda > 0. \tag{4.12}$$

于是由(2.4)立知

$$\sum_a\sum_b M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\pi_j X_\lambda^b(j) > 0. \qquad \forall i, j \in E \tag{4.13}$$

www.cnki.net

故条件(4.4)满足，证毕.

§5. 不断的有势 Q 过程的存在准则

自本节开始，我们讨论不断的有势（可配称、可逆）Q 过程的存在、唯一性问题. 本节讨论存在性，后两节讨论唯一性. 鉴于可配称、可逆情形的存在性已解决，本节给出有限流出不断的有势 Q 过程的存在准则.

定理 5.1　设 $Q=(q_{ij})$ 是一个保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出 Q 矩阵，则存在不断的有势 Q 过程的充要条件是 Q 弱可配称且条件 (2.1) 成立.

证　$m=0$ 的情形不足道. 以下设 $m\geqslant 1$. 充分性见[5;定理 3]. 往证必要性.

由[8; 定理 1 和 §2 引理 1]知，每一个 Q 过程形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{\xi_\lambda\}_1^n, \tag{5.1}$$

此处 $\xi_\lambda^b(b=1,2,\cdots,n)$ 满足(2.24). 如果条件 (2.1) 不满足，则由 (2.3) 知，存在 $X_\lambda^a(1\leqslant a\leqslant m)$无妨设是 X_λ^1，使

$$\sum_i \pi_i X_\lambda^1(i)=\infty. \tag{5.2}$$

今设 P_λ 是一个不断的有势 Q 过程，则由 $m\geqslant 1$ 知 $P_\lambda^{\min}$ 中断，从而 $\xi_\lambda^b(b=1,2,\cdots,n)$不全为零. 如有某个 ξ_λ^b 为零，不影响 P_λ 的表达式，可将它去掉. 故不失一般性，可假定

$$\xi_\lambda^b\neq 0,\qquad b=1,2,\cdots,n. \tag{5.3}$$

由 P_λ 不断知

$$\begin{aligned}1=\lambda\sum_j P_{ij}(\lambda)&=\lambda\sum_j P_{ij}^{\min}(\lambda)+\lambda\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j\xi_\lambda^b(j)\\&\geqslant\lambda\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j\xi_\lambda^b(j),\qquad\forall i\in E.\end{aligned} \tag{5.4}$$

又由 P_λ 有势得

$$\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}\pi_i X_\lambda^a(i)\xi_\lambda^b(j)=\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}\pi_j X_\lambda^a(j)\xi_\lambda^b(i). \tag{5.5}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lambda\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j\xi_\lambda^b(j)\\&=\lambda\pi_i^{-1}\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}\sum_j\pi_j X_\lambda^a(i)\xi_\lambda^b(j),\qquad\forall i\in E.\end{aligned} \tag{5.6}$$

进而得到

$$1\geqslant\lambda\pi_i^{-1}\sum_{b=1}^n M_\lambda^{1b}\sum_j\pi_j X_\lambda^1(j)\xi_\lambda^b(i),\qquad\forall i\in E. \tag{5.7}$$

利用 $\xi_\lambda^b\neq 0$ 及 (5.2) 得

$$M_\lambda^{1b}=0,\qquad b=1,2,\cdots,n. \tag{5.8}$$

这样，我们可将 P_λ 改写成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_2^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{\xi_\lambda\}_1^n. \tag{5.9}$$

再用一次 P_λ 不断性得

$$\lambda^{-1} = C_\lambda(i) = C_\lambda^{\min}(i) + \sum_{a=2}^{m}\sum_{b=1}^{n} M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j \xi_\lambda^b(j). \tag{5.10}$$

命 $i \to \omega^{(1)}$，由 [7;定理6.2]、(2.2)和(2.24)知上式右方趋于零. 这便导致矛盾. 证毕.

§ 6. 唯一性:双流出情形

本节考虑双流出情形,同时也为研究一般情形的唯一性问题作个准备.

命题 6.1 设

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{X'_\lambda\Pi\}_1^m, \tag{6.1}$$

$$\tilde{P}_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m'}\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda\{X'_\lambda\Pi\}_1^m \tag{6.2}$$

是两个有势 Q 过程,则 $P_\lambda = \tilde{P}_\lambda$ 的充要条件是 $\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$.

证 充分性显然,往证必要性. 设 $P_\lambda = \tilde{P}_\lambda$, 则

$$\{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{X'_\lambda\Pi\}_1^m = \{X_\lambda\}_1^{m'}\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda\{X'_\lambda\Pi\}_1^m, \tag{6.3}$$

即

$$\{X_\lambda\}_1^{m'}(\mathfrak{M}_\lambda - \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda)\{\eta_\lambda\}_1^n = 0. \tag{6.4}$$

然后使用定理 2.2 最后一部分证明立知

$$\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda. \tag{6.5}$$

命题得证.

现在假设 $Q = (q_{ij})$ 是双流出的,并设 Q 保守、弱可配称,它有配称列 (π_i), 满足

$$\sum_i \pi_i\bar{X}_\lambda(i) < \infty. \tag{6.6}$$

X_λ^a, η_λ^a, U_λ^{ab} 等记号均见 §2, 只是此处 $m = 2$.

定理 6.1 设 $Q = (q_{ij})$ 是保守的双流出 Q 矩阵，它有满足(6.6)的配称列 (π_i). 那么,关于 (π_i) 的不断的有势 Q 过程或者唯一,或者有无穷多个. 详言之:

(i) 若 $U^{11} = U^{12}(=U^{21}) = \infty$，或者 $U^{22} = U^{12}(=U^{21}) = \infty$，则不断的有势 Q 过程唯一;

(ii) 在其余情况下,有无穷多个不断的有势 Q 过程.

证 (i) 根据定理 2.2, 有势 Q 过程必定形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{2'}\mathfrak{M}_\lambda\{X'_\lambda\Pi\}_1^2, \tag{6.7}$$

于是由条件(i)及定理 3.2 知,它必定形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \bar{X}_\lambda M_\lambda\bar{X}'_\lambda\Pi. \tag{6.8}$$

但形如(6.8)的不断的有势 Q 过程唯一([5;定理 3]). 证得 (i).

(ii) 此时有五种情况可能发生:

(I) $\mathfrak{A} < \infty$;

(II) $U^{11} = \infty$, 但 $U^{12} = U^{21} < \infty$, $U^{22} < \infty$;

(III) $U^{22} = \infty$, 但 $U^{12} = U^{21} < \infty$, $U^{11} < \infty$;

(IV) $U^{11}=U^{22}=\infty$，但 $U^{12}=U^{21}<\infty$；

(V) $U^{12}=U^{21}=\infty$，但 $U^{11}<\infty$，$U^{22}<\infty$.

因为 (II) 和 (III)对称，故我们只须讨论 (I)、(II)、(IV) 和 (V). 现在分别加以讨论.

(I) $\mathfrak{A}<\infty$.

由假设知

$$\max\{(U^{12}+U^{22}+\tau_2),(U^{11}+U^{12}+\tau_1)\}<\infty, \tag{6.9}$$

故满足

$$0<M<\{(U^{12}+U^{22}+\tau_2)+(U^{11}+U^{12}+\tau_1)\}^{-1} \tag{6.10}$$

的 M 存在，而且有无穷多个. 任取其中之一，并命

$$M^{21}=\frac{1-M(U^{12}+U^{22}+\tau_2)}{U^{11}+U^{12}+\tau_1}, \tag{6.11}$$

$$M^{22}=\frac{1-M(U^{11}+U^{12}+\tau_1)}{U^{12}+U^{22}+\tau_2}, \tag{6.12}$$

$$\mathfrak{M}=\begin{pmatrix} M^{11} & M \\ M & M^{22}\end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{M}\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} M^{11}U^{11}+MU^{12}, & M^{11}U^{12}+MU^{22} \\ MU^{11}+M^{22}U^{12}, & MU^{12}+M^{22}U^{22}\end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

则 $\mathfrak{M}$ 是非负对称矩阵，并且由 (6.11)—(6.14) 知

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^2+\mathfrak{M}\{\tau\}_1^2$$

$$=\begin{pmatrix} M^{11}(U^{11}+U^{12})+M(U^{12}+U^{22}) \\ M(U^{11}+U^{12})+M^{22}(U^{12}+U^{22})\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} M^{11}\tau_1+M\tau_2 \\ M\tau_1+M^{22}\tau_2\end{pmatrix}=\{1\}_1^2. \tag{6.15}$$

故定理 2.3 的条件得以满足. 于是，由(6.13)、(6.14)、(2.73)和(6.7)所定义的 P_λ 是一个不断的有势 Q 过程.

今设 $\widetilde{M}$ 满足(6.10)，并仿(6.11)—(6.14)和(2.73)定义 $\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda$. 往证

$$\mathfrak{M}_\lambda=\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda\Longleftrightarrow\mathfrak{M}=\widetilde{\mathfrak{M}}. \tag{6.16}$$

事实上，若 $\mathfrak{M}_\lambda=\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda$，即

$$(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}=(I-\widetilde{\mathfrak{S}}+\widetilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\widetilde{\mathfrak{M}} \tag{6.17}$$

由(6.10)—(6.13)知 $\mathfrak{M}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 都是可逆的. 于是

$$\mathfrak{M}^{-1}(I-\mathfrak{M}\mathfrak{A}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)=\widetilde{\mathfrak{M}}^{-1}(I-\widetilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{A}+\widetilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{A}_\lambda), \tag{6.18}$$

即

$$\mathfrak{M}^{-1}-\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_\lambda=\widetilde{\mathfrak{M}}^{-1}-\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_\lambda. \tag{6.19}$$

故

$$\mathfrak{M}=\widetilde{\mathfrak{M}}. \tag{6.20}$$

反之，则是显然的.

现在，由(6.16)，命题 6.1 以及 $\mathfrak{M}$ 有无穷多个(因为满足(6.10)的 M 有无穷多个)立知此时不断的有势 Q 过程有无穷多个.

(II) $U^{11}=\infty$，但 $U^{12}=U^{21}<\infty$，$U^{22}<\infty$.

取

$$-S^{21} > U^{12}, \tag{6.21}$$

由假设，S^{21} 有无穷多种取法．再取

$$M^{11} = \frac{S^{21} - \tau_2 - U^{22}}{2S^{21} + U^{12} - \tau_2 - U^{22}}, \tag{6.22}$$

$$M^{12} = 1 - M^{11},$$

$$M^{21} = 0,\ M^{22} = 1,$$

$$-S^{12} = M^{11}U^{12} + M^{12}U^{22},$$

$$S^{11} = \tau_1 - S^{12},$$

$$S^{22} = \tau_2 - S^{21},$$

则由(6.21)得

$$2S^{21} + U^{12} - \tau_2 - U^{22} < S^{21} - \tau_2 - U^{22} < -U^{12} - \tau_2 - U^{22} \leqslant 0.$$

从而

$$0 < M^{11} < 1, \quad 0 < M^{12} < 1.$$

又

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^2 = \{\tau\}_1^2, \tag{6.23}$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{M}' = \begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M^{11} & 0 \\ M^{12} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{11}S^{11} + M^{12}S^{12} & S^{12} \\ M^{11}S^{21} + M^{12}S^{22} & S^{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{S}' = \begin{pmatrix} M^{11} & M^{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^{11} & S^{21} \\ S^{12} & S^{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M^{11}S^{11} + M^{12}S^{12} & M^{11}S^{21} + M^{12}S^{22} \\ S^{12} & S^{22} \end{pmatrix}.$$

为证 $\mathfrak{M}\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}\mathfrak{M}'$，只须证

$$S^{12} = M^{11}S^{21} + M^{12}S^{22}$$

或

$$-M^{11}U^{12} - (1 - M^{11})U^{22} = M^{11}S^{21} + (1 - M^{11})(\tau_2 - S^{21}).$$

即

$$M^{11}(U^{12} - U^{22} + 2S^{21} - \tau_2) = S^{21} - \tau_2 - U^{22}.$$

此即是 (6.22)．又

$$-S^{12} = \sum_t M^{1t}U^{t2},$$

$$-S^{21} > \sum_t M^{2t}U^{t1}.$$

这样，我们所选择的 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{M}$ 满足定理 3.2 的所有条件，故由它所定义的 P_λ 是一个不断的有势 Q 过程．因此，为证明有无穷多个不断的有势 Q 过程存在，如同 (I) 那样，我们只需证明：对于任意选择的另一个 $\tilde{\mathfrak{S}}$，用同样方法定义 $\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$，则有

$$\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda \Leftrightarrow \mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}. \tag{6.24}$$

事实上，如果 $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}$，则根据我们的取法，更有 $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}$，于是 $\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$．今设 $\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$．由于 $\mathfrak{M}$ 可逆，应有

$$\mathfrak{M}^{-1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S}) = \tilde{\mathfrak{M}}^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{A}_\lambda + \tilde{\mathfrak{S}}).$$

www.cnki.net

于是

$$\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{S}=\tilde{\mathfrak{M}}^{-1}\tilde{\mathfrak{S}}.$$

但

$$\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{S}=\frac{1}{M^{11}}\begin{pmatrix}1 & -M^{12}\\ 0 & M^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S^{11} & S^{12}\\ S^{21} & S^{22}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{M^{11}}\begin{pmatrix}S^{11}-M^{12}S^{21} & S^{12}-M^{12}S^{22}\\ M^{11}S^{21} & M^{11}S^{22}\end{pmatrix}.$$

同样

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{-1}\tilde{\mathfrak{S}}=\frac{1}{\tilde{M}^{11}}\begin{pmatrix}\tilde{S}^{11}-\tilde{M}^{12}\tilde{S}^{21} & \tilde{S}^{12}-\tilde{M}^{12}\tilde{S}^{22}\\ \tilde{M}^{11}\tilde{S}^{21} & \tilde{M}^{11}\tilde{S}^{22}\end{pmatrix}.$$

比较上面两式得 $\tilde{S}^{21}=S^{21}$. 从而 $\tilde{\mathfrak{S}}=\mathfrak{S}$. 故(6.24)成立.

(IV) $U^{11}=U^{22}=\infty, U^{12}=U^{21}<\infty$.

取

$$\mathfrak{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

$$-S^{12}=-S^{21}=S>U^{12}=U^{21}, \tag{6.26}$$

$$S^{11}=\tau_1+S, S^{22}=\tau_2+S, \tag{6.27}$$

然后易证

$$-S^{ab}>\sum_t M^{at}U^{tb}\qquad(a\neq b), \tag{6.28}$$

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^2=\mathfrak{M}\{\tau\}_1^2, \tag{6.29}$$

$\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{S}$ 均对称,故

$$\mathfrak{M}\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}\mathfrak{M}'. \tag{6.30}$$

因而 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{S}$ 满足定理 3.2 的一切条件. 由假设, $\mathfrak{S}$ 有无穷多种取法,所以只须再证

$$\mathfrak{M}_\lambda=\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda\Leftrightarrow\mathfrak{S}=\tilde{\mathfrak{S}}. \tag{6.31}$$

但这可由 $\mathfrak{M}=\tilde{\mathfrak{M}}$ 为单位矩阵立即导出.

(V) $U^{12}=U^{21}=\infty, U^{11}<\infty, U^{22}<\infty$.

取

$$\mathfrak{M}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

$$-S^{12}=-S^{21}=S>\max\{U^{11},U^{22}\}, \tag{6.33}$$

$$S^{11}=\tau_2+S,\quad S^{22}=\tau_1+S, \tag{6.34}$$

则

$$-S^{ab}>\sum_t M^{at}U^{tb}\qquad(a\neq b). \tag{6.35}$$

再与上述情形作同样处理. 定理证毕.

下面讨论可逆性.

定理 6.2　设 $Q=(q_{ij})$ 是一个保守的双流出 Q 矩阵. 它可配称并有配称分布 (π_i). 那么,可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 既约,或者 Q 虽非既约,但 Q 的每一子块非零流出.

www.cnki.net

可逆 Q 过程存在时，或者唯一，或者有无穷多个．详言之：

(i) 设存在性条件满足．若 $U^{11}=U^{12}(=U^{21})=\infty$，或 $U^{22}=U^{12}(=U^{21})=\infty$，则可逆 Q 过程唯一；

(ii) 设 Q 既约，并且 $\mathfrak{A}$ 的每一行至多有一个无穷元，则有无穷多个可逆 Q 过程；

(iii) 设 Q 可约，但 Q 的每一子块非零流出，并且 $\mathfrak{A}$ 的每一行至多只有一个无穷元，则有无穷多个可逆 Q 过程．

证 存在性断言见定理 1.7．而由定理 6.1 的(i)立得这里的(i)．而由定理 4.1 的(iii)和定理 6.1 的 (ii) 立得这里的 (ii)．为证明 (iii)，由命题 4.1，我们只须证明定理 6.1 的 (I)—(V) 所构造的每一个 $\mathfrak{M}_\lambda$ (或 $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$) 是严格正的便已足够．

先看 (I)．我们已经证明

$$(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\geqslant 0, \tag{6.36}$$

逆矩阵每一行不能全为零，而且(6.13)所定义的 $\mathfrak{M}>0$．于是 $\mathfrak{M}_\lambda>0$．故此时 (I) 中所构造的每一 Q 过程可逆．

再看 (II)．因为

$$[\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{S}]_{21}=S^{21}+\sum_t M^{2t}U_\lambda^{t1}=S^{21}+U_\lambda^{21}\leqslant S^{21}+U^{21}<0,$$

$$[\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{S}]_{22}=S^{22}+\sum_t M^{2t}U_\lambda^{t2}=\tau_2-S^{21}+U^{22}\geqslant -S^{21}>0,$$

又 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{S}$ 的逆矩阵非负，故它的逆矩阵的第 1 列严格正．顾及 $\mathfrak{M}$ 除 M^{21} 为零外全大于零，因而 $\mathfrak{M}_\lambda$ 严格正．

在 (IV) 和 (V) 中，我们总取 $-S^{ab}>\sum_t M^{at}U^{tb}(a\neq b)$，从而 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{S}$ 的非对角线元素全不为零．至于 (IV) 的对角线元素

$$S^{aa}+\sum_{t=1}^{2}M^{at}U_\lambda^{ta}=S^{aa}+U_\lambda^{aa}=\tau^a+S+U_\lambda^{aa}\geqslant S>0\qquad a=1,2,$$

而 (V) 的对角线元素

$$S^{11}+\sum_{t=1}^{2}M^{1t}U_\lambda^{t1}=S^{11}+U_\lambda^{21}=\tau_2+S+U_\lambda^{11}\geqslant S>0,$$

$$S^{22}+\sum_{t=1}^{2}M^{2t}U_\lambda^{t2}=S^{22}+U_\lambda^{22}=\tau_1+S+U_\lambda^{22}\geqslant S>0.$$

由这些事实及 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{S}$ 有非负逆知它的逆矩阵严格正．又 $\mathfrak{M}$ 每行、每列都有非零元(且为正)，从而 $\mathfrak{M}_\lambda$ 严格正．定理证毕．

在结束本节的时候，我们着重指出：虽然本节假定了维数 $m=2$，但我们的构造对于 $m\geqslant 2$ 的有限流出情形也是适用的．这只须把 m 个流出解结合为两组．甚至于对非有限流出情形，本节结果的充分性部分也是有意义的．例如，我们有

定理 6.3 设 $Q=(q_{ij})$ 保守，$m\geqslant 2$．再设 Q 有配称列 (π_i)，满足 (6.6)．如果存在满足条件 (2.2)—(2.7)的两个逗留解 X_λ^1 和 X_λ^2，使得由它们所定义的矩阵 $\mathfrak{A}$ 的每一行至多有一个无穷元，则存在无穷多个不断的有势 Q 过程．

§7. 唯一性：一般情形

本节在一般的有限流出条件下，研究不断的有势(可配称) Q 过程和可逆 Q 过程的唯一性问题.

下面是不断的有势 Q 过程的存在、唯一性准则：

定理 7.1　设 $Q=(q_{ij})$ 保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出，它有配称列 (π_i)，则不断的有势 Q 过程存在、唯一的充要条件是：(π_i) 满足

$$\sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i)<\infty, \tag{7.1}$$

并且下述两条件之一成立：

(i) $m\leqslant 1$;

(ii) $m\geqslant 2$，但对于 $X_\lambda^a(a=1,2,\cdots,m)$ 的任意划分

$$\tilde{X}_\lambda^1=\sum_{l=1}^{n} X_\lambda^{k_l}, \qquad 1\leqslant k_1<\cdots<k_n\leqslant m, n<m. \tag{7.2}$$

$$\tilde{X}_\lambda^2=\bar{X}_\lambda-\tilde{X}_\lambda^1$$

定义

$$\tilde{U}_\lambda^{ab}=\lambda\tilde{X}_\lambda^{a\prime}\Pi\tilde{X}^b \qquad a,b=1,2, \tag{7.3}$$

$$\mathfrak{A}_\lambda\uparrow\mathfrak{A}(\lambda\uparrow\infty) \tag{7.4}$$

都有 $\mathfrak{A}$ 的一行的元素全是无穷.

证　由定理 4.1，我们无妨假定 (π_i) 满足 (7.1). (i) 是显然的. 为证 $m\geqslant 2$ 的情形，只须证明：条件 (ii) 不成立等价于存在无穷多个不断的有势 Q 过程.

若条件 (ii) 不成立，即存在 $\tilde{X}_\lambda^1$ 和 $\tilde{X}_\lambda^2$，使 $\mathfrak{A}$ 的每一行至多有一个无穷元，则由定理 6.3 知此时有无穷多个不断的有势 Q 过程存在.

反之，设 $m\geqslant 2$，且不断的有势 Q 过程非唯一，往证 (ii) 不真. $m=2$ 的情形见定理 6.1. 以下无妨设 $m>2$. 由定理 2.2，每一个有势 Q 过程形如

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+\{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m, \tag{7.5}$$

其中 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是 $m\times m$ 对称矩阵.

命

$$\{\xi_\lambda\}_1^m=\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m, \tag{7.6}$$

无妨设 $\{\xi_\lambda^a\}$ 非累赘. 否则只须变动一下记号而无损于后面的讨论. 然后由定理 3.1 的证明及 P_λ 不断知，存在随机矩阵 $\mathfrak{G}=(G^{ab})$，使得 ξ_λ^a 可通过它的极点表出. 即存在 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个子集，无妨设是 $\{1,2,\cdots,n\}$，$n\leqslant m$，使得

$$\xi_\lambda^a=\sum_{b=n+1}^{m} G^{ab}\xi_\lambda^b, \qquad a=1,2,\cdots,m, \tag{7.7}$$

其中

$$\begin{aligned} &G^{ab}\geqslant 0, \quad G^{aa}=1, \qquad a=1,2,\cdots,n,\\ &\sum_{b=1}^{n} G^{ab}=1, \qquad a=1,2,\cdots,m, \end{aligned} \tag{7.8}$$

如果 $n=1$，则 P_λ 又可表成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \bar{X}_\lambda M_\lambda \bar{X}'_\lambda \Pi. \tag{7.9}$$

但形如(7.9)的不断的有势 Q 过程唯一，故由非唯一假定，可设 $n \geqslant 2$. 现在，由定理 3.2 前面的说明知，我们可命

$$\tilde{X}_\lambda^a = X_\lambda^a + \sum_{b=n+1}^{m} X_\lambda^b G^{ba}, \quad a = 1, 2, \cdots, n, \tag{7.10}$$

而将 P_λ 表成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{\tilde{X}_\lambda\}_1^{n'} \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda \{\tilde{X}'_\lambda \Pi\}_1^n. \tag{7.11}$$

此时由(3.31)知 ξ_λ^a $a = 1, 2, \cdots, n$ 是极点. 由 $\tilde{X}_\lambda^a$ 产生矩阵 $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{U}^{ab}; a, b = 1, 2, \cdots, n)$. 我们说，矩阵 $\tilde{\mathfrak{A}}$ 的每一行、每一列至多只有一个无穷元. 否则，例如设 $\tilde{U}^{11} = \tilde{U}^{12} = \infty$，则由(3.33)知，矩阵 $\tilde{\mathfrak{M}}$ 的第一列元素全为零. 再由(3.36)知，矩阵 $\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$ 的第一行、第一列元素也全是零. 故由定理 5.1 的证明可见 P_λ 中断. 是为矛盾.

先假定 $\tilde{\mathfrak{A}}$ 有无穷元存在. 无妨设在第一行有无穷元. 分两种情况:

(a) $\tilde{U}^{11} = \infty$.

此时由上段的讨论知

$$\tilde{U}^{1b} < \infty, \quad b = 2, 3, \cdots, n, \tag{7.12}$$

从而

$$\sum_{b=2}^{n} \tilde{U}^{1b} < \infty. \tag{7.13}$$

命

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^1 = X_\lambda^1 + \sum_{\substack{m \geqslant c \geqslant n+1 \\ G^{c1}=1}} X_\lambda^c, \tag{7.14}$$

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^2 = \sum_{b=2}^{n} X_\lambda^b + \sum_{\substack{m \geqslant d \geqslant n+1 \\ G^{d1}<1}} X_\lambda^d = \bar{X}_\lambda - \underset{\sim}{X}_\lambda^1, \tag{7.15}$$

则由

$$\begin{aligned}\sum_{b=2}^{n} \tilde{U}_\lambda^{1b} &= \lambda \sum_{b=2}^{n} \left[\eta_\lambda^1 + \sum_{c=n+1}^{m} G^{c1}\eta_\lambda^c\right]\left[X^b + \sum_{d=n+1}^{m} X^d G^{db}\right] \\ &= \sum_{b=2}^{n} U_\lambda^{1b} + \sum_{c=n+1}^{m} G^{c1} \sum_{b=2}^{n} U_\lambda^{cb} + \sum_{d=n+1}^{m} U_\lambda^{1d}(1 - G^{d1}) \\ &\quad + \sum_{c=n+1}^{m} G^{c1} \sum_{d=n+1}^{m} U_\lambda^{cd}(1 - G^{d1}) \uparrow \sum_{b=2}^{n} \tilde{U}^{1b} < \infty \\ &\qquad (\lambda \uparrow \infty),\end{aligned} \tag{7.16}$$

易见

$$\sum_{b=2}^{n} U^{1b} < \infty, \tag{7.17}$$

$$\sum_{\substack{m \geqslant c \geqslant n+1 \\ G^{c1}=1}} \sum_{b=2}^{n} U^{cb} < \infty, \tag{7.18}$$

$$\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}} U^{1d}<\infty, \tag{7.19}$$

$$\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}=1}}\ \sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}} U^{cd}<\infty. \tag{7.20}$$

从而

$$\underset{\sim}{U}^{21}=\underset{\sim}{U}^{12}=\lim_{\lambda\to\infty}\Big(\sum_{b=2}^{n}U_\lambda^{1b}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}=1}}\sum_{b=2}^{n}U_\lambda^{cb}$$

$$+\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}}U_\lambda^{1d}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}=1}}\ \sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}}U_\lambda^{cd}\Big)<\infty. \tag{7.21}$$

这样，我们选到返留解 $\underset{\sim}{X}{}_\lambda^1$ 和 $\underset{\sim}{X}{}_\lambda^2$，使得 $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}$ 的每行、每列至多有一个无穷元．故此时 (ii) 不成立．

(b) $\widetilde{U}^{1k}=\infty$，$k\neq 1$．无妨设 $k=2$，则

$$\widetilde{U}^{1b}<\infty,\qquad b=1,3,4,\cdots,n. \tag{7.22}$$

由对称性，$\widetilde{U}^{21}=\infty$，从而

$$\widetilde{U}^{2b}<\infty,\qquad b=2,3,\cdots,n. \tag{7.23}$$

进而

$$\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{U}^{ab}<\infty. \tag{7.24}$$

命

$$\underset{\sim}{X}{}_\lambda^1=X_\lambda^1+X_\lambda^2+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}+G^{c2}=1}}X_\lambda^c, \tag{7.25}$$

$$\underset{\sim}{X}{}_\lambda^2=\sum_{b=3}^{n}X_\lambda^b+\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}+G^{d2}<1}}X_\lambda^d=\bar{X}_\lambda-\underset{\sim}{X}{}_\lambda^1, \tag{7.26}$$

则由

$$\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{U}_\lambda^{ab}=\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}U_\lambda^{ab}+\sum_{c=n+1}^{m}(G^{c1}+G^{c2})\sum_{b=3}^{n}U_\lambda^{cb}$$

$$+\sum_{a=1}^{2}\sum_{d=n+1}^{m}U_\lambda^{ad}(1-G^{d1}-G^{d2})$$

$$+\sum_{c=n+1}^{m}(G^{c1}+G^{c2})\sum_{d=n+1}^{m}U_\lambda^{cd}(1-G^{d1}-G^{d2})$$

$$\uparrow\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{U}^{ab}<\infty\qquad(\lambda\uparrow\infty), \tag{7.27}$$

易见

$$\underset{\sim}{U}^{21}=\underset{\sim}{U}^{12}=\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg(\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}U_{\lambda}^{ab}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}+G^{c2}=1}}\sum_{b=3}^{n}U_{\lambda}^{cb}$$

$$+\sum_{a=1}^{2}\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}+G^{d2}<1}}U_{\lambda}^{ad}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}+G^{c2}=1}}\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}+G^{d2}<1}}U_{\lambda}^{cd}\Bigg)<\infty. \tag{7.28}$$

故此时 (ii) 不成立.

最后,如果 $\mathfrak{A}$ 有限,则更易处理. 特别,可同情况 (a) 一样选 $\underset{\sim}{X}_{\lambda}^{1}$ 和 $\underset{\sim}{X}_{\lambda}^{2}$. (ii) 也不成立. 定理证毕.

由定理 7.1 立即得到

定理 7.2 设 $Q=(q_{ij})$ 保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出. 它可配称并有配称分布 (π_i),则不断的可配称 Q 过程唯一的充要条件是定理 7.1 中的 (i) 或 (ii) 成立.

而由定理 6.2、定理 7.1 和定理 7.2 立得

定理 7.3 设 $Q=(q_{ij})$ 是一个保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出 Q 矩阵,则可逆 Q 过程存在唯一的充要条件是:

(i) Q 可配称;

(ii) Q 既约,或 Q 虽非既约但 Q 的每一子块非零流出;

(iii) 定理 7.1 中的条件 (i) 或 (ii) 之一成立

三条件同时成立.

参 考 文 献

[1] 侯振挺、陈木法,马尔可夫过程与场论 (见[2]第六章).

[2] 钱敏、侯振挺等著,可逆马尔可夫过程,湖南科学技术出版社,1979.

[3] 侯振挺、郭青峰,齐次可列马尔可夫过程,科学出版社,北京,1978.

[4] 侯振挺、郭青峰、陈木法,可逆 Q 过程存在准则 (见[2]第二章).

[5] 侯振挺、陈木法,一类 Q 过程的有势性. 北京师范大学学报,**3-4**(1980),1—10.

[6] 杨超群,柯氏向后微分方程组的边界条件. 数学学报,**16**:4(1966),429—452.

[7] Feller W., On boundaries and lateral conditions, *Ann. of Math.*, II. Ser., 65 (1957), 527—570.

[8] Williams D., On the construction problem for Markov chains, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. **3** (1964), 227—246.

数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

第 三 章

抽象空间中的可逆马尔可夫过程

陈 木 法
(北京师范大学)

§1. 引 言

马尔可夫过程中的可逆性概念来源于统计物理，它刻划了某种微观可逆性，即所谓“细致平衡”. Spitzer[11] 等人讨论了有限状态情况的可逆性. 对于可列状态情形，近两年来，国内已有一系列工作，而且大部分工作已汇集成册出版[1-4].

毫无疑问，非可列状态空间马尔可夫过程的可逆性问题是很值得研究的. Liggett[12] 等注意到形如 $\{0, 1\}^S$ (S 为可列集)的状态空间，它是非可列的. 对于 Dirichlet 空间，Sitverstein 做了不少工作[15]，然而，一般状态空间中的可逆过程(特别是可逆 q-过程)则未曾触及. 而这正是本文的目标. 应当指出，状态空间的抽象化，使得有关概念、结果以及论证方法都与可列情形有着很大区别，虽然可列情形的一些精细结果失去了意义，但可列情形的大多数结果在抽象空间中依然保留，这是令人满意的.

在本文中，我们证明了平稳 q 过程的可逆性等价于转移函数的可逆性；我们给出了转移函数和 q 函数对可逆性的各种等价形式；证明了对于可逆 q 过程，柯氏向前方程关于可逆测度 μ 几乎成立(柯氏向后微分方程总成立)；我们研究了最小 q 过程的可逆性；建立了可逆 q 过程的唯一性准则和不断可逆 q 过程的存在准则.

§2. 可逆马尔可夫过程

记 $\quad \mathbf{R}=(-\infty, +\infty), \quad \bar{\mathbf{R}}=[-\infty, +\infty], \quad \mathbf{T}=[0, \infty).$

$\mathbf{R}$ 的 Borel 子集所构成的 σ-域记作 $\mathscr{B}$, $\bar{\mathbf{R}}$ 的 Borel 子集所构成的 σ-域记作 $\bar{\mathscr{B}}$.

设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 和 $(E, \mathscr{E})$ 是任意的两个可测空间. 我们用 $f\in\mathscr{F}/\mathscr{E}$ 表示从 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(E, \mathscr{E})$ 的可测映射. 如果 $(E, \mathscr{E})=(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathscr{B}})$，则简记成 $f\in\mathscr{F}$. 如果 f 还是有限(有界)的，则记作 $f\in r\mathscr{F}$ ($f\in b\mathscr{F}$). 若 f 非负 $\mathscr{F}$ 可测，就记成 $f\in\mathscr{F}_+$.

如无特别声明，恒设 $(E, \mathscr{E})$ 为一个任意给定的抽象可测空间，$\mathscr{E}$ 包含一切单点集.

定义 2.1 称 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ 是 $(E, \mathscr{E})$ 上的(时齐)转移函数，倘若

(i) 对于每一个固定的 t 和 x, $A\mapsto P_t(x, A)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度，而且 $P_t(x, E)\leqslant 1$;

(ii) 对于每一个固定的 t 和 A, $x\mapsto P_t(x, A)$ 是 $\mathscr{E}$ 可测函数;

(iii) 对于每一个 t 和 s，每一个 $A\in\mathscr{E}$，下述 K-C 方程

本文 1979 年 10 月 20 日收到.

$$P_{t+s}(x,\ A)=\int P_t(x,\ dy)P_s(y,\ A) \tag{2.1}$$

成立,

(iv) 标准性. 对于每一个 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$,

$$\lim_{t\to 0^+}P_t(x,\ A)=P_0(x,\ A)=I_A(x), \tag{2.2}$$

称 $P_t(x,\ A)$ 是诚实(不断)的,如果

$$P_t(x,\ E)=1,\quad (\forall t\geqslant 0,\ \forall x\in E). \tag{2.3}$$

今设 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 是一个完备概率空间,$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域的上升族,定义在 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上、取值于 $(E,\ \mathscr{E})$ 中的随机过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 称为 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ 适应的,如果 $\forall t\in\mathbb{T}$,$X_t\in\mathscr{F}_t$. 在没有具体指明 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ 时,约定 $\mathscr{F}_t=\sigma(X_s;\ s\leqslant t)$.

定义 2.2 设 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 是定义在 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上,取值于 $(E,\ \mathscr{E})$ 并适应于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ 的随机过程. 又设 $P_t(x,\ A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 是 $(E,\ \mathscr{E})$ 上的转移函数,μ 为 $(E,\ \mathscr{E})$ 上的一个概率测度. 称 X 是关于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ 具有初始分布 μ 和转移函数 $P_t(x,\ A)$ 的马尔可夫过程,倘若

(i) $$\mu(A)=P[X_0\in A],\quad (\forall A\in\mathscr{E}). \tag{2.4}$$

(ii) $$E(f\circ X_{t+s}|\mathscr{F}_t)=P_s(X_t,\ f),\quad (t,\ s\geqslant 0,\ f\in b\mathscr{E}) \tag{2.5}$$

其中

$$P_t(x,\ f)\triangleq P_tf(x)\triangleq\int P_t(x,\ dy)f(y). \tag{2.6}$$

定义 2.3 称马尔可夫过程 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 是可逆的,如果对于任意的 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和任意的 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\in\mathscr{E}$,只要

$$t_n-t_{n-1}=t_2-t_1,\quad t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2,\ \cdots. \tag{2.7}$$

就有

$$\begin{aligned}&P[X_{t_1}\in A_1,\ X_{t_2}\in A_2,\ \cdots,\ X_{t_n}\in A_n]\\&=P[X_{t_1}\in A_n,\ X_{t_2}\in A_{n-1},\ \cdots,\ X_{t_n}\in A_1].\end{aligned} \tag{2.8}$$

定理 2.1 过程 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 可逆的充要条件是:对于每一个 $n\geqslant 1$,每一组满足 (2.7) 的 $\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\}$,每一个 $f\in b\mathscr{E}^n$ $(\mathscr{E}^n=\mathscr{E}\times\mathscr{E}\times\cdots\times\mathscr{E}\ (n\text{ 重}))$,都有

$$E[f(X_{t_1},\ X_{t_2},\ \cdots,\ X_{t_n})]=E[f(X_{t_n},\ X_{t_{n-1}},\ \cdots,\ X_{t_1})]. \tag{2.9}$$

证 由定义 2.3 及单调类定理(见[9; 第 0 章])立得本定理.

注 定义 2.3 和定理 2.1 并不需要转移函数. 但若 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 可逆,并有初始分布 μ 和不断的转移函数 $P_t(x,\ A)$,则从定义 2.3 可见.

$$\int_A\mu(dx)P_t(x,\ B)=\int_B\mu(dx)P_t(x,\ A)\quad (\forall A,B\in\mathscr{E},\ \forall t\geqslant 0).$$

定义 2.4 称转移函数 $P_t(x,\ A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 是可逆的,如果存在 $(E,\ \mathscr{E})$ 上的一个概率测度 μ,使得

$$\int_A\mu(dx)P_t(x,\ B)=\int_B\mu(dx)P_t(x,\ A),\quad (\forall A,\ B\in\mathscr{E},\ \forall t\geqslant 0). \tag{2.10}$$

当条件 (2.10) 满足时,称 μ 为 $P_t(x,\ A)$ 的可逆(概率)测度.

注 当 E 为可列集时,条件 (2.10) 化成

$$\mu_ip_{ij}(t)=\mu_jp_{ji}(t),\quad (\forall i,\ j\in E,\ \forall t\geqslant 0).$$

但这里的定义与可列状态空间情形的定义[4]不同. 那里在定义可配称时要求 $\mu_i>0(\forall i\in E)$,而在定义可逆时还要求 $p_{ij}(t)$ 是遍历的.

定理 2.2　设 $\mathscr{D}$ 是一个 π 一系，$\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{E}$，并且存在 $\{B_n\}\subset\mathscr{D}$，使 $B_n\uparrow E$，则 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度 μ 为转移函数 $P_t(x,A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 的可逆测度的充要条件是

$$\int_A \mu(dx)P_t(x,B)=\int_B \mu(dx)P_t(x,A),\quad (\forall A、B\in\mathscr{D},\ \forall t\geqslant 0). \tag{2.11}$$

证　任意固定 $A\in\mathscr{D}$，并令

$$\mathscr{D}_A=\{B\in\mathscr{E}:\ (2.11)\text{式对 } A、B \text{ 成立}\}$$

易证 $\mathscr{D}_A$ 是一个 d 一系．但 $\mathscr{D}_A\supset\mathscr{D}$，因而 $\mathscr{D}_A=\mathscr{E}$．

再对于任意固定的 $A\in\mathscr{E}$，令

$$\mathscr{D}'_A=\{B\in\mathscr{E}:\ (2.11)\text{式对于 } A、B \text{ 成立}\}.$$

同样可证 $\mathscr{D}'_A$ 是一个 d 一系．并且由前段所证知 $\mathscr{D}'_A\supset\mathscr{D}$．故 $\mathscr{D}'_A=\mathscr{E}$．由于 A 任意，故定理成立．

定理 2.3　下述断言等价

(i) $P_t(x,A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 关于 μ 可逆；

(ii) 对于 $\forall A、B\in\mathscr{E}$，$\forall f\in b\mathscr{E}$（或 $f\in\mathscr{E}_+$），有

$$\int \mu(dx)f(x)P_t(x,B)=\int_B \mu(dx)\int P_t(x,dy)f(y),\quad (\forall t\geqslant 0); \tag{2.12}$$

(iii) 对于 $\forall f,\ g\in b\mathscr{E}$（或 $\mathscr{E}_+$），

$$\int f(x)P_tg(x)\mu(dx)=\int g(x)P_tf(x)\mu(dx),\quad (\forall t\geqslant 0), \tag{2.13}$$

其中 $P_tf(x)$ 见 (2.6)．

证　使用单调类定理易证 (i)⇒(ii)⇒(iii)．(iii)⇒(i) 则是显然的．

定理 2.4　如果 $(E,\mathscr{E})$ 是距离可测空间[10]，则 $P_t(x,A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 可逆的充要条件是：存在 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度 μ，使得对于一切 $f,\ g\in b\mathscr{C}$，有

$$\int f(x)P_tg(x)\mu(dx)=\int g(x)P_tf(x)\mu(dx),\quad (\forall t\geqslant 0), \tag{2.14}$$

其中 $b\mathscr{C}$ 表 $(E,\mathscr{E})$ 上有界连续函数的全体．

证　由[10; 附篇引理 8]知，这里的条件等价于定理 2.3 中的条件 (iii)．故由定理 2.3 知，本定理成立．

定义 2.5　称马氏过程 $X=(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ 是平稳的，如果存在 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度 μ，使得对于任意有限个 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\in\mathbf{T}$ 和任意的 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\in\mathscr{E}$，有

$$\begin{aligned}&P[X_{t_1}\in A_1,\ X_{t_2}\in A_2,\ \cdots,\ X_{t_n}\in A_n]\\&=P[X_{t_1+s}\in A_1,\ X_{t_2+s}\in A_2,\ \cdots,\ X_{t_n+s}\in A_n]\quad (\forall s\geqslant 0).\end{aligned} \tag{2.15}$$

定理 2.5　设 $X=(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ 是一个平稳马氏过程，它有诚实的转移函数 $P_t(x,A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$，则过程 X 可逆等价于它的转移函数可逆．

证　首先，由[9; 第一章 (2.8)式]知，对于任何的 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$，任何的 $f\in b\mathscr{E}^n$，有

$$\begin{aligned}&E[f(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})]\\&=\int \mu(dx_1)\int P_{t_2-t_1}(x_1,dx_2)\int\cdots\int P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\cdot f(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned} \tag{2.16}$$

由此可见，若 $X=(X_t)_{t\in T}$ 可逆，则

$$P[X_0\in A,\ X_t\in B]=P[X_0\in B,\ X_t\in A]. \tag{2.17}$$

即

$$\int_A \mu(dx)P_t(x,\ B)=\int_B \mu(dx)P_t(x,\ A). \tag{2.18}$$

必要性成立. 今证充分性. 设 $P_t(x,\ A)$ 可逆，则由定理2.3知(2.13)成立. 今设 $(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 满足(2.7)，并记

$$g_n(x_1)=\int f_{n-1}(x_2)P_{t_2-t_1}(x_1,\ dx_2)\int f_{n-2}(x_3)P_{t_3-t_2}(x_2,\ dx_3)$$

$$\int\cdots\int f_1(x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},\ dx_n). \tag{2.19}$$

其中

$$f_i\in b\mathscr{E},\quad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{2.20}$$

则

$$g_n(x_1)=P_{t_2-t_1}(f_{n-1}(\cdot)g_{n-1}(\cdot))(x_1). \tag{2.21}$$

反复使用(2.13)和(2.21)，我们得到

$$\begin{aligned}
&E[f_n(X_{t_1})f_{n-1}(X_{t_2})\cdots f_1(X_{t_n})]\\
&=\int f_n(x_1)\mu(dx_1)\int f_{n-1}(x_2)P_{t_2-t_1}(x_1,\ dx_2)\int\cdots\int f_1(x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},\ dx_n)\\
&=\int f_n(x_1)\mu(dx_1)\int f_{n-1}(x_2)P_{t_2-t_1}(x_1,\ dx_2)g_{n-1}(x_2)\\
&=\int f_n(x_1)P_{t_2-t_1}(f_{n-1}(\cdot)g_{n-1}(\cdot))(x_1)\mu(dx_1)\\
&=\int(f_{n-1}(x_2)g_{n-1}(x_2))(P_{t_2-t_1}f_n(\cdot))(x_2)\mu(dx_2)\\
&=\int\mu(dx_2)\ f_{n-1}(x_2)\int f_n(y_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_2,\ dy_n)g_{n-1}(x_2)\\
&=\int\mu(dx_2)\Big(f_{n-1}(x_2)\int f_n(y_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_2,\ dy_n)\Big)\cdot(P_{t_2-t_1}(f_{n-2}(\cdot)g_{n-2}(\cdot)))(x_2)\\
&=\int\mu(dx_3)f_{n-2}(x_3)g_{n-2}(x_3)\Big(P_{t_2-t_2}\Big(f_{n-1}(\cdot)\int f_n(y_n)\cdot P_{t_n-t_{n-1}}(\cdot,\ dy_n)\Big)\Big)(x_3)\\
&=\cdots=\int f_1(y_1)\mu(dy_1)\int f_2(y_2)P_{t_2-t_1}(y_1,\ dy_2)\int\cdots\int f_n(y_n)P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},\ dy_n)\\
&=E[f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_n(X_{t_n})].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

特别，取 $f_i=I_{A_i}(1\leqslant i\leqslant n)$，便得(2.8). 证毕.

定理2.5的意义在于，它把平稳马氏过程的可逆性化为它的转移函数的可逆性. 以后，我们把具有同样转移函数的马氏过程视为同一的. 因此，我们也直接称转移函数 $P_t(x,\ A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 为马尔可夫过程.

§3. 可逆 q 过程

Kendall. D. G. 在[5]中证明了：对于任何一个马尔可夫过程 $P_t(x,\ A)$ 来说，下列两极限存在

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-P_t(x,\ \{x\})}{t}=q(x),\quad (x\in E),\tag{3.1}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{P_t(x,\ A)}{t}=q(x,\ A),\quad (x\in E\backslash A,\ A\in\mathscr{R}).\tag{3.2}$$

而且

$$0\leqslant q(x)\leqslant+\infty,\quad 0\leqslant q(x,\ A)<+\infty.\tag{3.3}$$

其中

$$\mathscr{R}=\{A:\ A\in\mathscr{E},\ \limsup_{t\to 0^+x\in A}(1-P_t(x,\ \{x\}))=0\}\tag{3.4}$$

为方便，我们命

$$q(x,\ A)=q(x,\ A\backslash\{x\}).\tag{3.5}$$

这样，$q(x,\ A)$对于一切$x\in E$和$A\in\mathscr{R}$都有定义．在[10]中还证明了：在某些条件下，对于任何$x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, 恒有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{P_t(x,\ A)}{t}=q(x,\ A),\quad (x\notin A).\tag{3.6}$$

而且对于固定的x, $q(x,\ \cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度；对于固定的A, $q(\cdot,\ A)$是$\mathscr{E}$可测函数．

在实际中，先知道的往往不是过程$P_t(x,\ A)$本身，而是它的q函数对$q(x)-q(x,\ A)$，因此，研究对于什么样的$q(x)-q(x,\ A)$，存在过程$P_t(x,\ A)$以之为q函数对；如果存在，何时唯一？何时可逆？这些问题就格外重要．

定义 3.1　称$q(x)-q(x,\ A)$ $(x\in E,\ A\in\mathscr{E})$为$q$函数对，如果

（i）对于固定的$A\in\mathscr{E}$, $q(\cdot)$, $q(\cdot,\ A)\in r\mathscr{E}_+$;

（ii）对于固定的x, $q(x,\ \cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度，且

$$q(x,\ E)\leqslant q(x),\quad q(x,\ \{x\})=0,\quad (\forall x\in E).\tag{3.7}$$

若还有

$$q(x,\ E)=q(x),\quad (\forall x\in E).\tag{3.8}$$

则称q函数对$q(x)-q(x,\ A)$是保守的．

定义 3.2　称转移函数$P_t(x,\ A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$是一个$q$过程，如果

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{P_t(x,\ A)-P_0(x,\ A)}{t}=q(x,\ A)-I_A(x)q(x),\quad (\forall x\in E,\ \forall A\in\mathscr{E}).\tag{3.9}$$

若还有

$$P_t(x,\ E)=1,\quad (\forall t\geqslant 0,\ \forall x\in E).\tag{3.10}$$

则称q过程$P_t(x,\ A)$是诚实（不断）的．

命题 3.1　如果，q过程$P_t(x,\ A)$关于μ可逆，则我们有

$$\int_A\mu(dx)q(x,\ B)=\int_B\mu(dx)q(x,\ A),\quad (\forall A,\ B\in\mathscr{E}).\tag{3.11}$$

证　由于$P_t(x,\ A)$关于μ可逆，故有

$$\int_A\mu(dx)P_t(x,\ B)=\int_B\mu(dx)P_t(x,\ A),\quad (\forall A,\ B\in\mathscr{E},\ \forall t\geqslant 0).\tag{3.12}$$

熟知[5]

$$P_t(x,\ \{x\})\geqslant e^{-q(x)t},\quad (\forall x\in E,\ \forall t\geqslant 0).\tag{3.13}$$

因而

$$\frac{1-P_t(x,\ \{x\})}{t}\leqslant q(x),\quad (\forall x\in E,\ \forall t>0).\tag{3.14}$$

于是

$$\frac{P_t(x,\ B)}{t}\leqslant\frac{P_t(x,\ E\backslash\{x\})}{t}\leqslant\frac{1-P_t(x,\ \{x\})}{t}\leqslant q(x)\quad(\forall x\notin B,\ \forall t>0).\tag{3.15}$$

下面分三种情况讨论

(i) $A\cap B=\emptyset$.

记 $G_n=[x:q(x)\leqslant n]$, 则 $G_n\uparrow E$, 由(3.12)和(3.15)知

$$\int_A\mu(dx)q(x,\ B)=\lim_{n\to\infty}\int_{A\cap G_n}\mu(dx)q(x,\ B\cap G_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to0^+}\int_{A\cap G_n}\frac{P_t(x,\ B\cap G_n)}{t}\mu(dx)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to0^+}\int_{B\cap G_n}\frac{P_t(x,\ A\cap G_n)}{t}\mu(dx)=\int_B\mu(dx)q(x,\ A).$$

(ii) $A\supset B$.

应用(i), 得

$$\int_A\mu(dx)q(x,\ B)=\int_B\mu(dx)q(x,\ B)+\int_{A\backslash B}\mu(dx)q(x,\ B)$$

$$=\int_B\mu(dx)q(x,\ B)+\int_B\mu(dx)q(x,\ A\backslash B)$$

$$=\int_B\mu(dx)q(x,\ A).$$

(iii) 一般情形. 使用(i)和(ii)得

$$\int_A\mu(dx)q(x,\ B)=\int_A\mu(dx)q(x,\ AB)+\int_A\mu(dx)q(x,\ B\backslash A)$$

$$=\int_{AB}\mu(dx)q(x,\ A)+\int_{B\backslash A}\mu(dx)q(x,\ A)$$

$$=\int_B\mu(dx)q(x,\ A).\tag{3.16}$$

证毕.

由命题 3.1, 我们可以引进如下的

定义 3.3 称 q 函数对 $q(x)-q(x,\ A)$ 是可逆的, 如果存在 $\mathscr{E}$ 上的概率测度 μ, 使得

$$\int_A\mu(dx)q(x,\ B)=\int_B\mu(dx)q(x,\ A),\quad(\forall A,\ B\in\mathscr{E}).\tag{3.17}$$

此时称 μ 为 $q(x)-q(x,\ A)$ 的可逆测度.

注 q 函数对 $q(x)-q(x,\ A)$ 的可逆性并不依赖于 $q(x)$. 因此, 有时我们就说 $q(x,\ A)$ 是可逆的, 而不提及 $q(x)$.

在以下定理中, "μ 可积"条件可稍为放宽, 但为简洁起见, 我们将不这样做.

定理 3.1 设 $\mathscr{D}$ 是一个 π 一系, $\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{E}$, 并且存在 $\{B_n\}\subset\mathscr{D}$, 使 $B_n\uparrow E$. 又设 $q(x,\ E)$ 是 μ 可积的, 则概率测度 μ 为 $q(x,\ A)$ 的可逆测度的充要条件是

$$\int_A\mu(dx)q(x,\ B)=\int_B\mu(dx)q(x,\ A)\quad(\forall A,\ B\in\mathscr{D})\tag{3.18}$$

定理 3.2 设 $q(x,\ E)$ 是 μ 可积的, 则下述断言等价

(i) $q(x,\ A)$ 关于 μ 可逆;

(ii) 对于 $\forall A\in\mathscr{E}$, $\forall f\in b\mathscr{E}$, 有

$$\int\mu(dx)f(x)q(x,\ A)=\int_A\mu(dx)\int q(x,\ dy)f(x).\tag{3.19}$$

www.cnki.net

(iii) 对于 $\forall f、g\in b\mathscr{E}$, 有

$$\int f(x)qg(x)\mu(dx)=\int g(x)qf(x)\mu(dx), \tag{3.20}$$

其中

$$qf(x)=\int q(x, dy)f(y). \tag{3.21}$$

如果$(E, \mathscr{E})$是距离可测空间,则上述条件又都等价于

(iv) 对于 $\forall f、g\in b\mathscr{C}$,

$$\int f(x)qg(x)\mu(dx)=\int g(x)qf(x)\mu(dx). \tag{3.22}$$

此外,若设 $f, g\in r\mathscr{E}_+(\mathscr{C}_+)$, 则"$\mu$ 可积"条件可以去掉.

这两个定理的证明与§2中相应定理的证明类似,不再重述.

有时,使用过程 $P_t(x, A)$的拉氏变换更为方便. 令

$$P_\lambda f(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_tf(x)dt \quad (\lambda>0, f\in b\mathscr{E}). \tag{3.23}$$

称 $P_\lambda(x, A)$ $(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ 为 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$的拉氏变换. 一个 q 过程的拉氏变换也称为 q 过程.

周知,过程 $P_t(x, A)$的拉氏变换 $P_\lambda(x, A)$必定满足若干条件. 反之, 满足这些条件的 $P_\lambda(x, A)$唯一决定一个过程 $P_t(x, A)$. 详见[6]. 由此及拉氏变换的唯一性定理易见

定理 3.3 过程 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$可逆的主要条件是它的拉氏变换 $P_\lambda(x, A)$ $(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E})$可逆, 即存在概率测度 μ, 使得

$$\int_A \mu(dx)P_\lambda(x, B)=\int_B \mu(dx)P_\lambda(x, A), \qquad (\forall A、B\in\mathscr{E}, \forall\lambda>0) \tag{3.24}$$

§4. Колмогоров 向前、向后方程

定义 4.1 设 $P_\lambda(x, A)$ $(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E})$是一个 q 过程, 则

$$(F_\lambda) \qquad \int P_\lambda(x, dy)(\lambda I_A(y)-[q(y, A)-q(y)I_A(y)])=I_A(x), \tag{4.1}$$

$$(B_\lambda) \qquad (\lambda+q(x))P_\lambda(x, A)-\int q(x, dy)P_\lambda(y, A)=I_A(x)$$

$$(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}). \tag{4.2}$$

分别称为过程 $P_\lambda(x, A)$的 Колмогоров 向前、向后方程. 称方程$(F_\lambda)\mu$ 几乎成立, 如果对于每一个 $A\in\mathscr{E}$, 存在一个 μ 零集 $N(A)$, 使得对于每一个 $x\notin N(A)$和每一个 $\lambda>0$, (F_λ) 成立.

在[7]中已经证明,每一个 q 过程 $P_\lambda(x, A)$满足(B_λ), 但却未必满足(F_λ). 但我们有

定理 4.1 对于每一个可逆 q 过程 $P_\lambda(x, A)$来说, 如果 $q(x)$关于 μ 可积, 那么柯氏向前方程(F_λ)关于 μ 几乎成立. 而柯氏向后方程(B_λ)总成立.

证 设 q 过程 $P_\lambda(x, A)$ 关于 μ 可逆，则从 (B_λ) 得

$$\int_A \mu(dx)(\lambda+q(x))P_\lambda(x, B)-\int_A \mu(dx)\int q(x, dy)P_\lambda(y, B)=\mu(AB), \tag{4.3}$$

即

$$\int_A \mu(dx)(\lambda+q(x))P_\lambda(x, B)-\int I_A(x)(qP_\lambda(\cdot, B))(x)\mu(dx)=\mu(AB). \tag{4.4}$$

利用 $q(x, A)$ 的可逆性得

$$\int_A \mu(dx)(\lambda+q(x))P_\lambda(x, B)-\int \mu(dx)P_\lambda(x, B)q(x, A)=\mu(AB), \tag{4.5}$$

即

$$\lambda\int_A \mu(dx)P_\lambda(x, B)-\int \mu(dx)(q(x, A)-q(x)I_A(x))\times$$
$$\times(P_\lambda I_B(\cdot))(x)=\mu(AB). \tag{4.6}$$

再利用 $P_\lambda(x, A)$ 的可逆性得

$$\lambda\int_B \mu(dx)P_\lambda(x, A)-\int I_B(x)P_\lambda(q(\cdot, A)-q(\cdot)I_A(\cdot))(x)\mu(dx)=\mu(AB), \tag{4.7}$$

即

$$\lambda\int_B \mu(dx)P_\lambda(x, A)-\int_B \mu(dx)\int P_\lambda(x, dy)[q(y, A)-q(y)I_A(y)]$$
$$=\int_B I_A(x)\mu(dx), \quad (\forall B\in\mathscr{E}). \tag{4.8}$$

两边关于 μ 取 Radon–Nikodym 导数，得

$$\lambda P_\lambda(x, A)-\int P_\lambda(x, dy)[q(y, A)-q(y)I_A(y)]=I_A(x), \quad \mu\text{-a.e.} \tag{4.9}$$

例外集依赖于 A 和 λ. 但 $P_\lambda(x, A)$ 依 λ 连续（注意由定义 2.1 可推出 $t\mapsto P_t(x, A)$ 一致连续），故例外集可选为只依赖于 A 的. 定理得证.

§5. 最小 q 过程的可逆性

定义 5.1 称 q 过程 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ $(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ 是最小 q 过程，如果对任一 q 过程 $P_\lambda(x, A)$ 来说，都有

$$P_\lambda(x, A)\geqslant P_\lambda^{\min}(x, A), \quad (\forall\lambda>0, \forall x\in E, \forall A\in\mathscr{E}). \tag{5.1}$$

定理 5.1 最小 q 过程 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ 是方程 (B_λ) 的最小正解，它可用如下方式得到：令

$$P_\lambda^{(1)}(x, A)=\frac{\delta(x, A)}{\lambda+q(x)}, \quad (\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}), \tag{5.2}$$

$$P_\lambda^{(n+1)}(x, A)=\int \frac{q(x, dy)}{\lambda+q(x)}P_\lambda^{(n)}(y, A), \quad (n\geqslant 1), \quad (\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}). \tag{5.3}$$

则

$$P_\lambda^{\min}(x, A)=\sum_{n=1}^{\infty} P_\lambda^{(n)}(x, A), \quad (\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}). \tag{5.4}$$

证 由[8; 定理 1]及[11]知，最小 q 过程存在唯一. 然后由[8; 定理 3 的推论 1]立得本定理.

定理 5.1 表明了对于固定的 λ 和 A，关于 x，$P_\lambda^{\min}(x, A)$ 的最小性. 下面的定理 5.2 则表明对于固定的 λ 和 x，$P_\lambda^{\min}(x, A)$ 关于 A 也具有最小性. 为此，先建立两条引理.

设给定$U(\cdot,\cdot)$和$\nu(\cdot)$. 对于$\forall A\in\mathscr{E}$, $U(\cdot, A)\in r\mathscr{E}_+$; 对于$\forall x\in E$, $U(x,\cdot)$和$\nu(\cdot)$都是$\mathscr{E}$上的测度,并且$\nu(E)<+\infty$.

定义 5.2 如果$\mathscr{E}$上的测度μ满足

$$\mu(A)=\int\mu(dx)U(x, A)+\nu(A),\quad (A\in\mathscr{E}),\tag{5.5}$$

则称μ是方程(5.5)的解. 称μ^*是方程(5.5)的最小解, 如果μ^*满足(5.5), 并且对于方程(5.5)的任一解μ, 都有

$$\mu(A)\geqslant\mu^*(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.6}$$

(5.6)称为最小性.

引理 5.1 设$U(\cdot,\cdot)$和$\nu(\cdot)$如上. 则方程(5.5)的最小解存在并且唯一. 它可用如下方式得到: 若令

$$\mu^{(0)}(A)\equiv 0,\quad (\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.7}$$

$$\mu^{(n+1)}(A)=\int\mu^{(n)}(dx)U(x, A)+\nu(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E}, n\geqslant 0).\tag{5.8}$$

则

$$\mu^{(n)}\uparrow\mu^*\quad (n\uparrow\infty).\tag{5.9}$$

证 (i) 先证$\mu^{(n)}$的单调性.

显见$\mu^{(1)}(A)=\int\mu^{(0)}(dx)U(x, A)+\nu(A)=\nu(A)\geqslant\mu^{(0)}(A)$ $(\forall A\in\mathscr{E})$, 且$\mu^{(0)}$和$\mu^{(1)}$都是$\mathscr{E}$上的测度. 今设

$$\mu^{(n)}(A)\geqslant\mu^{(n-1)}(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.10}$$

并设$\mu^{(n-1)}$和$\mu^{(n)}$都是$\mathscr{E}$上的测度,则易证

$$\int\mu^{(n)}(dx)f(x)\geqslant\int\mu^{(n-1)}(dx)f(x)\quad (\forall f\in r\mathscr{E}_+).\tag{5.11}$$

因而

$$\begin{aligned}\mu^{(n+1)}(A)&=\int\mu^{(n)}(dx)U(x, A)+\nu(A)\geqslant\int\mu^{(n-1)}(dx)U(x, A)+\nu(A)\\&=\mu^{(n)}(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E}).\end{aligned}\tag{5.12}$$

故$\mu^{(n+1)}$也是一个测度并且单调增成立. 今记

$$\mu^*(A)=\lim_{n\to\infty}\mu^{(n)}(A).\quad (\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.13}$$

现证(ii)μ^*是$\mathscr{E}$上的测度.

显然$\mu^*(A)\geqslant 0$, $(\forall A\in\mathscr{E})$, $\mu(\emptyset)=0$, 并且μ^*是有限可加的. 若

$$\mathscr{E}\ni A_m\uparrow A,\quad (m\uparrow\infty).\tag{5.14}$$

则因$\mu^{(n)}(A_m)$对于n和m都是单调增的,于是

$$\mu^*(A)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mu^{(n)}(A_m)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mu^{(n)}(A_m)=\lim_{m\to\infty}\mu^*(A_m).\tag{5.15}$$

故μ^*是从下连续的. 因而μ^*是σ-可加的[14; p84 定理 A].

(iii) μ^*是方程(5.5)的解.

留到下一引理中去证明.

(iv) 最小性.

设μ是方程(5.5)的任一解,那么

$$\mu(A)=\int\mu(dx)U(x,\ A)+\nu(A)\geqslant\mu^{(0)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.16}$$

假设已有

$$\mu(A)\geqslant\mu^{(n)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.17}$$

则

$$\mu(A)=\int\mu(dx)U(x,\ A)+\nu(A)\geqslant\int\mu^{(n)}(dx)U(x,\ A)+\nu(A)$$
$$=\mu^{(n+1)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.18}$$

因而对于一切 $n\geqslant0$, 有

$$\mu(A)\geqslant\mu^{(n)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.19}$$

故

$$\mu(A)\geqslant\lim_{n\to\infty}\mu^{(n)}(A)=\mu^{*}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.20}$$

故最小性成立.

引理 5.2 若令

$$\tilde{\mu}^{(1)}(A)=\nu(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.21}$$

$$\tilde{\mu}^{(n+1)}(A)=\int\tilde{\mu}^{(n)}(dx)U(x,\ A),\quad(\forall A\in\mathscr{E},\ n\geqslant1).\tag{5.22}$$

则

$$\mu^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}.\tag{5.23}$$

证 于(5.22)的两边对 n 求和, 得

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k+1)}(A)=\int\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\Big)(dx)U(x,\ A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.24}$$

显然 $\tilde{\mu}^{(n)}$, $\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}(n\geqslant1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}$ 都是 $\mathscr{E}$ 上的测度. 现令

$$\mathscr{L}=\Big\{f\in\mathscr{E}:\ \lim_{n\to\infty}\int\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\Big)(dx)f(x)=\int\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}\Big)(dx)f(x)\Big\}.\tag{5.25}$$

则 $1\in\mathscr{L}$, $\mathscr{L}$ 对于锥射运算封闭. 今设

$$\mathscr{L}\ni f_m\uparrow f\in\mathscr{E},\quad f_m\geqslant0.\tag{5.26}$$

则因 $\int\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\Big)(dx)f_m(x)$ 对于 n 和 m 都是单调增的, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\Big)(dx)f(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\Big)f_m(x)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\Big)f_m(x)=\int\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}\Big)(dx)f(x).\tag{5.27}$$

但

$$\mathscr{L}\supset\mathscr{D}=\{I_A:\ A\in\mathscr{E}\},\tag{5.28}$$

故

$$\mathscr{L}\supset r\mathscr{E}_{+}.\tag{5.29}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{(n)}$ 是方程(5.5)的解.

另一方面, 显见

$$\mu^{(1)}(A)\geqslant\tilde{\mu}^{(1)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.30}$$

若设

$$\mu^{(n)}(A)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.31}$$

则易见

www.cnki.net

$$\mu^{(n+1)}(A)=\int\mu^{(n)}(dx)U(x,\ A)+\nu(A)\geqslant\int\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\Big)(dx)U(x,\ A)+\nu(A)$$

$$=\sum_{k=2}^{n+1}\tilde{\mu}^{(k)}(A)+\tilde{\mu}^{(1)}(A)=\sum_{k=1}^{n+1}\tilde{\mu}^{(k)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.32}$$

故

$$\mu^{*}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}.\tag{5.33}$$

现在，由已证的 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}$ 满足方程(5.5)、引理 5.1 证明中的(iv)以及(5.33)立知本引理成立. 我们同时证明了引理 5.1 中的(ii).

定理 5.2　对于固定的 λ 和 x, $P_{\lambda}^{\min}(x,\ \cdot)$ 是方程

$$P_{\lambda}(x,\ \cdot)=\int P_{\lambda}(x,\ dy)\int_{\cdot}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,\ \cdot)}{\lambda+q(x)}\tag{5.34}$$

的最小解.

证　由定理 5.1, 引理 5.1 和引理 5.2, 我们只需证明，若令

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(1)}(x,\ A)=\frac{\delta(x,\ A)}{\lambda+q(x)},\quad(A\in\mathscr{E}),\tag{5.35}$$

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(n+1)}(x,\ A)=\int\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)},\quad(A\in\mathscr{E}).\tag{5.36}$$

则

$$P_{\lambda}^{(n)}(x,\ A)=\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(x,\ A),\quad(n\geqslant1,\ A\in\mathscr{E}).\tag{5.37}$$

由(5.2), (5.35)知(5.37)对于 $n=1$ 成立，当 $n=2$ 时，

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(2)}(x,\ A)=\int\tilde{P}_{\lambda}^{(1)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}=\frac{1}{\lambda+q(x)}\int_{A}\frac{q(x,\ dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=P_{\lambda}^{(2)}(x,\ A),\quad(A\in\mathscr{E}).\tag{5.38}$$

今设对于 $k=n-1$ 和 $k=n$ 已有

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(k)}(x,\ A)=P_{\lambda}^{(k)}(x,\ A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.39}$$

则

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(n+1)}(x,\ A)=\int\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}=\int P_{\lambda}^{(n)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\int\frac{1}{\lambda+q(x)}\Big(\int q(x,\ du)P_{\lambda}^{(n-1)}(u,\ dy)\Big)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}$$

$$=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}\Big(\int P_{\lambda}^{(n-1)}(u,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}\Big)$$

$$=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}\Big(\int\tilde{P}_{\lambda}^{(n-1)}(u,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}\Big)$$

$$=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(u,\ A)=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}P_{\lambda}^{(n)}(u,\ A)$$

$$=P_{\lambda}^{(n+1)}(x,\ A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.40}$$

证毕.

定理 5.3　若 q 函数对 $q(x)-q(x,\ A)$ 可逆，则最小 q 过程也可逆，并有相同的可逆测度.

证　设 $q(x,\ A)$ 关于 μ 可逆，则

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(1)}(x, B) = \int_A \mu(dx) \frac{\delta(x, B)}{\lambda + q(x)}$$
$$= \int_{AB} \frac{\mu(dx)}{\lambda + q(x)}, \quad (\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall \lambda > 0). \tag{5.41}$$

关于 A、B 对称，所以

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(1)}(x, B) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(1)}(x, A), \quad (\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall \lambda > 0). \tag{5.42}$$

今设

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, B) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, A), \quad (\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall \lambda > 0). \tag{5.43}$$

则由定理 3.2 得

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(n+1)}(x, B) = \int_A \mu(dx) \int \frac{q(x, dy)}{\lambda + q(x)} P_\lambda^{(n)}(x, B)$$
$$= \int \mu(dx) \left(\frac{\delta(x, A)}{\lambda + q(x)} \right) q(P_\lambda^{(n)}(\cdot, B))(x)$$
$$= \int P_\lambda^{(n)}(x, B) q\left(\frac{\delta(\cdot, A)}{\lambda + q(\cdot)} \right)(x) \mu(dx)$$
$$= \int P_\lambda^{(n)}(x, B) \int_A \frac{q(x, dy)}{\lambda + q(y)} \mu(dx),$$
$$(\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall \lambda > 0), \tag{5.44}$$

由(5.43)和单调类定理易证

$$\int \mu(dx) f(x) P_\lambda^{(n)}(x, B) = \int_B \mu(dx) \int P_\lambda^{(n)}(x, dy) f(y), \quad (\forall f \in r\mathscr{E}_+). \tag{5.45}$$

于是由(5.45)和(5.37)知，(5.44)的右方

$$= \int_B \mu(dx) \int P_\lambda^{(n)}(x, dy) \int_A \frac{q(y, dz)}{\lambda + q(z)}$$
$$= \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(n+1)}(x, A), \quad (\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall \lambda > 0). \tag{5.46}$$

这样，对于一切 $n \geqslant 1$，有

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, B) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, A), \quad (\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall \lambda > 0). \tag{5.47}$$

故由定理 5.1 和(5.47)知

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{\min}(x, A) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{\min}(x, A), \quad (\forall A, B \in \mathscr{E}, \forall \lambda > 0). \tag{5.48}$$

证毕.

§6. 可逆 q 过程的存在唯一性

本节研究对于给定的 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$，可逆 q 过程的存在唯一性问题.

由命题 3.1 和定理 5.3 立即得到

定理 6.1 可逆 q 过程存在的充要条件是 q 函数对可逆. 而在 q 函数对可逆时，最小 q 过程 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ $(\lambda > 0, x \in E, A \in \mathscr{E})$就是一个可逆 q 过程.

定义 6.1 称两个过程 $P_\lambda(x, A)$ 和 $\overline{P}_\lambda(x, A)$ 是 μ 无区别的，如果

$$\mu[x:\ \exists\lambda>0,\ \exists A\in\mathscr{E}\ \text{使}\ P_\lambda(x,\ A)\neq\bar{P}_\lambda(x,\ A)]=0. \tag{6.1}$$

容易看出

引理 6.1　两个 μ 无区别的 q 过程关于 μ 同时可逆或同时不可逆.

因此, 在研究可逆 q 过程的唯一性时, 两个 μ 无区别 q 过程是可以不加区别的.

记

$$\mathscr{U}_\lambda=\left\{\xi_\lambda(x):\ \begin{array}{c}\int_E q(x,\ dy)\xi_\lambda(y)=(\lambda+q(x))\xi_\lambda(x),\\ 0\leqslant\xi_\lambda(\cdot)\leqslant 1\quad(\lambda>0).\end{array}\right\} \tag{6.2}$$

并用 $\dim\mathscr{U}_\lambda$ 表 $\mathscr{U}_\lambda$ 的维数(见[6]. 那里已证 $\dim\mathscr{U}_\lambda$ 与 $\lambda>0$ 无关).

定义 6.2　称 $\mathscr{U}_\lambda$ 是 μ 几乎零维的, 如果

$$\mu[x:\ \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]=0. \tag{6.3}$$

记作 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$. 此处

$$\bar{\xi}_\lambda(x)=1-\lambda P_\lambda^{\min}(x,\ E) \tag{6.4}$$

是 $\mathscr{U}_\lambda$ 的最大元, 即是方程

$$\left.\begin{array}{c}\int_E q(x,\ dy)\xi_\lambda(y)=(\lambda+q(x))\xi_\lambda(x)\\ 0\leqslant\xi_\lambda(\cdot)\leqslant 1,\quad\lambda>0.\end{array}\right\} \tag{6.5}$$

的最大解(见[6; 定理 4.1]).

由[6; 定理 4.3]知, 对于 $\forall x\in E$,

$$\bar{\xi}_\lambda(x)=0\Leftrightarrow\bar{\xi}_\mu(x)=0. \tag{6.6}$$

故 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$ 也与 $\lambda>0$ 无关.

定理 6.2　设 $q(x)-q(x,\ A)$ 保守, 则可逆 q 过程在 μ 无区别意义下唯一的充要条件是

(i) $q(x,\ A)$ 关于 μ 可逆;

(ii) $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$

同时成立.

证　若 $\dim\mathscr{U}_\lambda=0$, 则由[6; 定理 4.1 的系 1]知 q 过程唯一, 它就是 $P_\lambda^{\min}(x,\ A)$. 于是由条件(i)及定理 5.3 立知此时可逆 q 过程唯一.

若 $\dim\mathscr{U}_\lambda=0$ 不真, 但 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$, 则由[7; 命题 3]知, 此时存在无穷多个 q 过程. 任取其中一个, 记作 $\bar{P}_\lambda(x,\ A)$. 由于 $\bar{P}_\lambda^{\min}(x,\ A)$ 和 $\bar{P}_\lambda(x,\ A)$ 都满足 (B_λ). 故对于 $\forall A\in\mathscr{E}$, $(\lambda\bar{P}_\lambda(x,\ A)-\lambda P_\lambda^{\min}(x,\ A))$ 满足齐次方程(6.5). 由 $\bar{\xi}_\lambda(x)$ 的最大性得

$$0\leqslant\lambda(\bar{P}_\lambda(x,\ A)-P_\lambda^{\min}(x,\ A))\leqslant\bar{\xi}_\lambda(x)\quad(\forall\lambda>0,\ \forall x\in E,\ \forall A\in\mathscr{E}). \tag{6.7}$$

于是由 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$ 知

$$\begin{aligned}0&\leqslant\mu[x:\ \exists\lambda>0,\ \exists A\in\mathscr{E}\ \text{使}\ \bar{P}_\lambda(x,\ A)\neq P_\lambda^{\min}(x,\ A)]\\ &\leqslant\mu[x:\ \exists\lambda>0\ \text{使}\ \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]=\mu[x:\ \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]=0\end{aligned} \tag{6.8}$$

故 $\bar{P}_\lambda(x,\ A)$ 与 $P_\lambda^{\min}(x,\ A)$ 是 μ 无区别的. 因而由引理 6.1 和定理 5.3 知 $\bar{P}_\lambda(x,\ A)$ 可逆. 由于 $\bar{P}_\lambda(x,\ A)$ 是任意取的, 这表明任一 q 过程与 $P_\lambda^{\min}(x,\ A)$ μ 无区别. 因此条件是充分的.

www.cnki.net

现证必要性. 条件(i)显然是必要的. 今设条件(i)满足但条件(ii)不真, 则

$$\mu[x:\ \xi_\lambda(x)\neq 0]>0. \tag{6.9}$$

设 μ 是 $q(x,\ A)$ 的可逆测度, 并取

$$\psi_\lambda(A)=\int_A \mu(dx)\xi_\lambda(x)\quad(\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}). \tag{6.10}$$

则由(6.9)知

$$\psi_\lambda(E)\neq 0\quad(\lambda>0). \tag{6.11}$$

另一方面, 显然 $\psi_\lambda(\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度, 并且满足

$$\psi_\mu(A)=\int\psi_\lambda(dy)M(\lambda,\ \mu;\ y,\ A)\quad(\lambda,\ \mu>0). \tag{6.12}$$

此处,

$$M(\lambda,\ \mu;\ x,\ A)=\delta(x,\ A)+(\lambda-\mu)P_\mu^{\min}(x,\ A)\quad(\lambda,\ \mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \tag{6.13}$$

(详见[6; 定理 4.3]). 故由[6; 定理 5.1]知

$$P_\lambda(x,\ A)=P_\lambda^{\min}(x,\ A)+\frac{\xi_\lambda(x)\psi_\lambda(A)}{\lambda\psi_\lambda(E)}\quad(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \tag{6.14}$$

是一个不断的 q 过程. 易见它还是可逆的. 再由(6.9), (6.10)和(6.11)知

$$\begin{aligned}\mu[x:\ \exists\lambda>0\ \text{使}\ P_\lambda(x,\ E)\neq P_\lambda^{\min}(x,\ E)]&=\mu[x:\ \exists\lambda>0\ \text{使}\ \xi_\lambda(x)\neq 0]\\&=\mu[x:\ \xi_\lambda(x)\neq 0]>0.\end{aligned} \tag{6.15}$$

故可逆 q 过程在 μ 无区别意义下非唯一. 这表明条件是必要的.

定理 6.3 存在不断的可逆 q 过程的充要条件是

(i) $q(x,\ A)$ 可逆;

(ii) $q(x)-q(x,\ A)$ 保守

同时成立.

证 由[7; 命题 3]知, 存在不断 q 过程的充要条件是 $q(x)-q(x,\ A)$ 保守. 故上述条件显然是必要的. 现证充分性. 如果 $q(x)-q(x,\ A)$ 保守并且 $\dim\mathscr{U}_\lambda=0$, 则最小 q 过程不断, 它就是一个可逆 q 过程. 如果 $\dim\mathscr{U}_\lambda>0$ 但 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$. 则由[7; 命题 3]知, 此时存在无穷多个不断的 q 过程, 从而由定理 6.2 的充分性证明中可以看出, 此时每一个不断的 q 过程都是可逆 q 过程. 而若 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{\neq}0$. 则由定理 6.2 的必要性证明中可见, 此时也存在不断的可逆 q 过程证毕.

本文是在严士健老师和侯振挺老师的指导下完成的. 谨致谢意.

参 考 文 献

[1] 钱敏平，平稳马氏链的可逆性，北京大学学报，**4** (1978)。

[2] 侯振挺、郭青峰、陈木法，可逆 Q 过程存在准则，见[4]。

[3] 侯振挺、陈木法，马尔可夫过程与场论，科学通报 **25**:20(1980)，见[4]。

[4] 钱敏、侯振挺等著，可逆马尔可夫过程，湖南科学技术出版社，(1979)。

[5] Kendall, D. G., Some analytical properties of continuous stationary Markov transition functions, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 529—540.

[6] 胡迪鹤，抽象空间中的 q 过程的构造理论，数学学报，**16**: 2 (1966)。

[7] 胡迪鹤，抽象空间中 q 过程的唯一性准则，数学学报，**23**:5(1980)。

[8] 陈木法，一类算子方程的最小正解，北京师范大学学报，**3** (1979)。

[9] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Markov Processes and Potential Theory., New York and London, (1968).

[10] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，(1965)。

[11] Spitzer, F., *Lecture Notes on Math.*, **390** (1973) Ecole d'été de Prob. de Saint Flour.

[12] Liggett, T. M. The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles, *Lecture Notes in Math.*, **598** (1976), 188—248. Springer-Verlag, Beilin and New York.

[13] 胡迪鹤，论纯间断的马尔可夫过程，武汉大学学报，**4** (1978), 1—18, **1** (1979), 15—38.

[14] Loève. Michel. Probability Theory. 3rd. ed. Princeton. *N. J. D. Van Nostrand. Co. Inc.*, (1963).

[15] Silverstein. M. L., Symmetric Markov Processes. *Lecture Notes in Math.*, **426** Springer, Beilin (1974).

REVERSIBLE MARKOV PROCESSES IN ABSTRACT SPACE

CHEN MUFA
(*Beijing Normal University*)

ABSTRACT

Let $(E, \mathscr{E})$ be a measurable space and every single point set $\{x\}$ belong to $\mathscr{E}$. $q(x)-q(x, A)$ $(x\in E, A\in\mathscr{E})$ is said to be a q–pair, if

(i) For fixed A, $q(\cdot)$, $q(\cdot, A)$ is a $\mathscr{E}$–measurable function of x;

(ii) For fixed x, $q(x, \cdot)$ is a measure on $\mathscr{E}$, and

$$0\leqslant q(x, A)\leqslant q(x, E)\leqslant q(x)<+\infty. \quad (\forall x\in E, \forall A\in\mathscr{E})$$

$$q(x, \{x\})=0, \quad (\forall x\in E).$$

A q–pair of functions $q(x)-q(x, A)$ is called conservative when

$$q(x, E)=q(x), \quad (\forall x\in E).$$

$P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ is said to be a q–process, if

(i) For fixed t, A, $P_t(\cdot, A)$ is a $\mathscr{E}$–measurable function of x;

(ii) For fixed t, x, $P_t(x, \cdot)$ is a measure on $\mathscr{E}$ and $0\leqslant P_t(x, E)\leqslant 1$;

(iii) $$P_{s+t}(x, A)=\int_E P_t(x, dy)P_s(y, A), \quad (x\in E, A\in\mathscr{E}, t, s\geqslant 0);$$

(iv) $$\lim_{t\to 0^+}\frac{P_t(x, A)-I_A(x)}{t}=q(x, A)-q(x)I_A(x), \quad (\forall x\in E, \forall A\in\mathscr{E}).$$

It is called honest when

$$P_t(x, E)=1, \quad (\forall t\geqslant 0, \forall x\in E).$$

A q–process $P_t(x, A)$ is called reversible, if there is a probability measure μ on $\mathscr{E}$ such that

$$\int_A \mu(dx)P_t(x, B)=\int_B \mu(dx)P_t(x, A) \quad (\forall t\geqslant 0, \forall A, B\in\mathscr{E}).$$

In this paper, we obtain some criterions for

(i) The existence of a reversible q–process;

(ii) The existence of a honest reversible q–process;

(iii) The uniqueness of the reversible q–processes when the q–pair is conservative.

可逆马尔可夫过程

钱 敏 侯振挺等著

第四章 马尔可夫过程与场论

湖南科学技术出版社

可逆马尔可夫过程

KENI MAERKEFU GUOCHENG

作者(按姓氏笔划为序)

陈木法 汪培庄 侯振挺 郭青峰

钱 敏 钱敏平 龚光鲁

湖南科学技术出版社

1979·长沙

序

近年来，远离平衡态问题的研究引起了广泛的重视，并有不少物理学家，物理化学家和生物化学家积极从事这方面的研究工作，取得了不少引人注目的成果。在数学上，*E. Nelson* 1958年首先提出了扩散过程的可逆性概念与对称化问题，这相当于平衡态统计物理中的细致平衡情况。

我们企图通过对马氏过程和马氏链可逆性的研究，为远离平衡的定常系统提供一个数学模型。本书就是我们研究成果的初步总结，其中的大部分内容是第一次公开发表。本书共分六章，第一至四章分别讨论马氏链、Q 过程、生灭过程和实轴上二阶微分算子生成的马氏过程的可逆性，第五章讨论了不可逆马氏链的环流分解与环量分布(这里的环流与物理中的*Tomita*环流类似)，研究的结论与生物化学的有关结果比较吻合。第六章建立了一种抽象场，并从场的观点出发，详细地研究了马氏链、马氏过程、Q 过程等的有势性、可配称性和可逆性等问题。

在马氏过程的可逆性方面还有许多值得深入研究的问题，诸如高维连续状态的马氏过程的可逆性与环流(*H. Ito*于1978年开始研究这个问题)、环量分布与自由能转换问题的关系，以及它们在生物化学中的应用等都有广阔的前景。

我们希望本书的出版能引起有关同志对这个问题的兴趣。

湘潭大学付教授杨向群同志细致地审阅了全书原稿并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的谢意。

作者1979.4

目　录

绪　言 …… 钱敏 1

第一章　可逆马尔可夫链 …… 汪培庄 13

§1.1. 马氏链的可逆性定义 …… 13

§1.2. 可配称与可示性 …… 16

§1.3. 删除判别法 …… 19

§1.4. 示性链的位势性质 …… 23

§1.5. 应用于随机游动 …… 25

第二章　可逆Q过程 …… 侯振挺、郭青峰、陈木法 29

§2.1. 可逆平稳马氏过程 …… 29

§2.2. Q过程 …… 32

§2.3. 可配称Q矩阵 …… 34

§2.4. 可逆Q过程存在准则 …… 43

§2.5. 可逆Q过程的一个充分性判据 …… 46

§2.6. 可逆单流出Q过程 …… 51

第三章　可逆生灭过程 …… 侯振挺、汪培庄、陈木法 58

§3.1. 可逆生灭过程(保守情形) …… 58

§3.2. 可逆生灭过程(非保守情形) …… 63

§3.3. 可逆双边生灭过程 …… 65

第四章　二阶微分算符导出的马氏过程及其可逆性

…… 龚光鲁、钱敏 72

§4.1. 边界点的分类 …… 72

§4.2. 非齐次方程的最小解 …… 87

§4.3. 转移密度的存在 …… 100

§4.4. 最小过程及其保守条件 …… 117
§4.5. 局部边界条件下Ω导出的马氏过程可逆的必要条件 …… 123
§4.6. 在局部边界条件下Ω导出的过程可逆的充要条件及全部可逆过程 …… 138
第五章 不可逆性和细致平衡与环流分解 ……钱敏平、钱敏 151
§5.1. 环流分解定理 …… 153
§5.2. 独立环流的个数的唯一性 …… 164
§5.3. 满足前进方程的平稳保守Q过程的概率流速分解 …… 172
§5.4. 平稳马氏链对时间的倒逆 …… 176
§5.5. 非稳定流的分解 …… 179
§5.6. 熵产生率与环流、可逆性的关系 …… 182
§5.7. 环流分解与跳周率 …… 184
第六章 马尔可夫过程与场论 ……侯振挺、陈木法 194
§6.1. 古典场论 …… 194
§6.2. 场与势场 …… 195
§6.3. 有势场 …… 197
§6.4. 二维格点场 …… 202
§6.5. $N(\geqslant 2)$ 维格点场 …… 207
§6.6. 有势马尔可夫链 …… 212
§6.7. 有势二元组随机徘徊 …… 216
§6.8. 有势$N(\geqslant 2)$ 元组随机徘徊 …… 225
§6.9. 有势马尔可夫过程 …… 226
§6.10. 有势Q矩阵 …… 230
§6.11. 有势Q过程 …… 232
§6.12. 有势生灭(双边生灭)Q过程 …… 233
§6.13. 有势单流出Q过程 …… 235

第六章　马尔可夫过程与场论

侯振挺　　陈木法

（长沙铁道学院）　（北京师范大学）

自从发现了物理学中的古典位势理论与马尔可夫过程的某些课题有十分密切的联系以来，马尔可夫过程理论的研究出现了新的面貌，并有了很大发展.这一发现，不仅使马尔可夫过程理论受益，而且也给位势理论的研究提供了新的途径. 两者相互渗透、交错发展. 最近，我们在马尔可夫过程中发现了古典场论的某些类似物（在本书的第一章已初步注意到这一点）. 这样一来，我们就能够把场论中的某些研究方法和结果移植到马尔可夫过程中去. 沿此，我们引入了抽象“场”的概念. 进而，找到了场成为势场的充要条件、势场的“势”及势的概率意义；我们从场的观点出发，详细地研究了马尔可夫链、马尔可夫过程、二元组及N元组随机徘徊、Q矩阵和Q过程的有势性、可配称性和可逆性问题. 给出了有效的判别准则和一系列充要条件. 这些研究还表明：“势场”这一概念更为本质，它更为清楚地刻划了“可逆性”的本质特征.

为了把问题阐述清楚，让我们先从古典场论谈起.

§6.1. 古典场论

设G为空间中的一个区域. 如果对于任一点$P(x, y, z)\in G$，有矢量

$$\vec{a}(x,y,z;t)=a_x(x,y,z;t)\vec{i}+a_y(x,y,z;t)\vec{j}+a_z(x,y,z;t)\vec{k} \tag{6.1.1}$$

与之对应，这时，我们说在G上定义了一个(矢量)场$(G,\vec{a}(t))$，其中$a_x(x,y,z;t)$，$a_y(x,y,z;t)$和$a_z(x,y,z;t)$是定义在G上的单值连续函数，并且有连续的偏导数。

如果存在一个数量函数$u(x,y,z;t)$，使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=a_y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=a_z \tag{6.1.2}$$

则称$(G,\vec{a}(t),u(t))$为一个势场，并称$u(x,y,z;t)$为场$(G,\vec{a}(t))$(或$\vec{a}(t)$)的势。如果势函数$u(x,y,z;t)$不含t，则称$(G,\vec{a}(t))$为保守场。

周知，若G为单连通域，则场$(G,\vec{a}(t))$有势的充要条件是场$(G,\vec{a}(t))$沿G内的任一闭回路L所作的功为零。即

$$\oint_L a_x(x,y,z;t)dx+a_y(x,y,z;t)dy+a_z(x,y,z;t)dz=0$$
$$\forall t\geqslant 0. \tag{6.1.3}$$

§6.2. 场与势场

设E是任一至多可列集，T是任一指标集(有限、可列或$[0,\infty)$等等)。又设$a(t)=\{a_{ij}(t);\ i,j\in E\}$是给定的一族定义在$T$上的实函数，满足如下基本假设：

(1) $a(t)$的非对角线元素$a_{ij}(t)(i\neq j)$非负，但对角线元素任意；

(2) "零同"性：

$$a_{ij}(t)>0 \Longleftrightarrow a_{ji}(t)>0,\ \forall t\in T,\ \forall i,\ j\in E \qquad (6.2.1)$$

以后所用到各种形式的$a(t)$(或a)均满足以上假设，不再随处申明。

定义6.2.1. 如果$a_{ij}(t)>0$，我们就说在时刻t，i直达j，并记作$i\to j$。我们把$i_1\to i_2\to\cdots\to i_{n+1}$叫做$a(t)$在时刻$t$的一条($n$节)路，记作$L(t)=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{n+1})$。并称$i_k\to i_{k+1}(1\leqslant k\leqslant n)$为$L(t)$的一节。此时称在$t$时刻$i_1$可达$i_{n+1}$，并记作$i_1\rightsquigarrow i_{n+1}$。(虽然在这里我们没有明确写出$t$，但要记住路总是依赖于$t$的)。

$a(t)$在时刻t的一切路的全体，记作$\mathscr{L}(t)$。

如果在时刻t，$i\to j$，我们就命

$$\varphi_{ij}(t)=\log a_{jj}(t)-\log a_{ij}(t)。 \qquad (6.2.2)$$

无妨记$\varphi(t)=(\varphi_{ij}(t))$。其中当在时刻$t$，$i$不直达$j$时，$\varphi_{ij}(t)$是不定元(我们不加定义)。

为了研究马尔可夫过程的需要，现在我们模仿本章§1中所谈的古典场，而引入"抽象"场及有关的概念。

视E为本章§6.1中的区域G；视E中的任一元i为G中的点$P(x,y,z)$；视无穷维矢量$(\varphi_{ij}(t);\ j\in E)$为矢量$(a_x(x,y,z;t),\ a_y(x,y,z;t),\ a_z(x,y,z;t))$，等等。

定义6.2.2. 称$(E,a(t),\varphi(t))$(或$a(t)$)为场；称$\mathscr{L}(t)$的元素为场$a(t)$的路；$\varphi(t)$称为场$a(t)$的场强；若i在时刻t直达j，则称$\varphi_{ij}(t)$为场强$\varphi(t)$在时刻t从i到j的分量。

为了描述场作"功"及势场的概念，下面我们默认E中任意两个直达元素之间的距离为1。因此，场$(E,\ a(t))$沿路$L(t)=(i_1,i_2,\cdots,i_n,\ i_{n+1})$所作的"功"可理解成

$$\varphi(L(t))=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{i_k i_{k+1}}(t) \qquad (6.2.3)$$

而相应于(6.1.2)的应是

$u_j(t)-u_i(t)=\varphi_{ij}(t)$，如果在时刻$t\in T$，$i\to j$，$i$，$j\in E$。

由此引进：

定义6.2.3. 如果存在函数族$u(t)=\{u_i(t);\ i\in E\}(t\in T)$使得

$u_j(t)-u_i(t)=\varphi_{ij}(t)$。如果在时刻$t\in T, i\to j, i,j\in E$ (6.2.4)

成立，则称 $(E,\ a(t),\ u(t))$ (或$a(t)$) 为势场，并称$u(t)$为$a(t)$的势。

显然有

定理6.2.1. 如果$(u_i(t))$和$(v_i(t))$是$a(t)$的势，$w(t)$是T上的任一实函数，则

(1) $(u_i(t)+w(t))$也是$a(t)$的势；

(2) $(w(t)u_i(t)+(1-w(t)v_i(t))$也是$q(t)$的势。

需加一个右括号

§6.3. 有 势 场

本节研究场$(E,a(t))$成为势场的充要条件。同时也给出了势场的各种性质。

定义6.3.1. 称$a(t)$在时刻$t\in T$是不可约的，如果在时刻$t\in T$，对于一切i，$j\in E$，$i\neq j$有i可达j。否则称为可约的。

定义6.3.2. 称$a(t)$是路径无关的，如果对于每个时刻t的每一条闭合回路$L(t)=(i,\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m,\ i)$有

$$\varphi(L(t))=0. \qquad (6.3.1)$$

定理6.3.1. 场$(E,\ a(t))$有势的充要条件是：它是路径无关的。

证明 必要性：

设$a(t)$有势$(u_i(t))$。$L(t)$为任一闭合回路

$L(t)$: $i=i_1\to i_2\to\cdots\to i_n\to i_{n+1}=i$，那么

$$\varphi(L(t))=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{i_ki_{k+1}}(t)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u_{i_{k+1}}(t)-u_{i_k}(t)]$$

$$=u_{i_{n+1}}(t)-u_{i_1}(t)=0 \qquad (6.3.2)$$

从而$a(t)$路径无关。反之，设$a(t)$路径无关，我们只需对每一个$t\in T$，求出$(u_i(t))$。以下固定$t\in T$。先设$a(t)$不可约，任取$i_0\in E$，命

$$u_{i_0}(t)=0,\ \forall t\in T \qquad (6.3.3)$$

对于$\forall i\in E$，任意选取一条从i_0到i的路

$$i_0\to i_1\to\cdots\to i_n\to i_{n+1}=i \qquad (6.3.4)$$

并命

$$u_i(t)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_{i_ki_{k+1}}(t) \qquad (6.3.5)$$

由路径无关性知(6.3.5)式有意义。现在，对于一切$i,j\in E$，如$i\to j$，就有

$$u_j(t)-u_i(t)=\sum_{k=0}^{m}\varphi_{j_kj_{k+1}}(t)-\sum_{k=1}^{n}\varphi_{i_ki_{k+1}}(t)$$

$$=\varphi_{ij}(t) \qquad (6.3.6)$$

其中

$$j_0=i_0\to j_1\to j_2\to\cdots\to j_{m+1}=j \qquad (6.3.7)$$

为如上选定的从i_0到j的一条路。

如果$a(t)$是可约的，由于$a(t)$是零同的，所以我们可将它分成若干个不可约部分，对每一部分分别用上述办法求出$u_i(t)$，合并起来便构成$a(t)$的一个势。定理证毕。

下面介绍本章将要反复使用的若干约定和记号。

对于固定的$t\in T$，因为$a(t)$是零同的，故我们可将E分割成有限个或可列个不交集$B_l(t)(l\in D(t))$之并。使得或者$E_l(t)$是单点集（即$E_l(t)=\{i\}$，$\forall j\in E$，$j\neq i$，有$a_{ij}(t)=0$）；或者$(E, a(t))$限于$E_l(t)$是不可约的（即$i, j\in E_l(t)\Rightarrow i\rightsquigarrow j$）。对于每一个$l\in D(t)$，任意取定一个元素$\Delta_l\in E_l(t)$；对于每一个$i\in E_l(t)$，$i\neq\Delta_l$，任意取定（$E_l(t)$中的）一条路

$$L_l(t):\ \Delta_l\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_k\to i; \tag{6.3.8}$$

记

$$\hat{a}_{\Delta_l i}(t)=a_{\Delta_l i_1}(t)a_{i_1 i_2}(t)\cdots a_{i_k i}(t); \tag{6.3.9}$$

$$\hat{a}_{i\Delta_l}(t)=a_{i i_k}(t)a_{i_k i_{k-1}}(t)\cdots a_{i_1\Delta_l}(t); \tag{6.3.10}$$

$$v_i(t)=\begin{cases}1, & \text{如果}i=\Delta_l,\\ \dfrac{\hat{a}_{\Delta_l i}(t)}{\hat{a}_{i\Delta_l}(t)}, & \text{如果}i\neq\Delta_l\end{cases} \tag{6.3.11}$$

$$\varphi(i,\ \Delta_l;\ t)=\varphi(L_l(t)). \tag{6.3.12}$$

请注意，以后我们将对于各种形式的$(a_{ij}(t))$使用这些约定和记号，但我们并不再一一申明。

下述定理是$a(t)$路径无关的判别准则。

定理6.3.2. $a(t)$路径无关的充要条件是

$$\hat{a}_{\Delta_l i}(t)a_{ij}(t)\,\hat{a}_{j\Delta_l}(t)=\hat{a}_{\Delta_l j}(t)a_{ji}(t)\,\hat{a}_{i\Delta_l}(t)$$

$$\forall i,\ j\in E_l(t),\ \forall l\in D(t),\ \forall t\in T. \tag{6.3.13}$$

成立*）。其中Δ_l和$L_l(t)$是如上预先选定的。

这个定理表明，条件（6.3.13）对于每一组$(\Delta_l, L_l(t), l\in D(t))$

*）与此无妨约定 $\hat{a}_{\Delta_l\Delta_l}(t)=1\ (\forall l\in D)$。以下类同。

同时成立或同时不成立(当t固定)。即定理的结论不依赖于$(\Delta_l, L_l(t);\ l\in D(t))$的选法。

证明 必要性：无妨设$i\to j$(否则(6.3.13)自然成立)，此时，条件(6.3.13)等价于

$$\varphi(\Delta_l,\ j;\ t)=\varphi(\Delta_l,\ i;\ t)+\varphi_{ij}(t) \tag{6.3.14}$$

但由假设$a(t)$路径无关，故(6.3.14)显然成立。

充分性：设

$$L(t):\ i=j_0\to j_1\to\cdots\to j_m\to j_{m+1}=j \tag{6.3.15}$$

是$E_l(t)$中的从i到j的任一条路，则由(6.3.13)知，对于每一节路(6.3.14)成立。于是

$$\begin{aligned}\varphi(L(t))&=\sum_{s=0}^{m}\varphi_{j_s j_{s+1}}(t)\\&=\sum_{s=0}^{m}[\varphi(\Delta_l,\ j_{s+1};\ t)-\varphi(\Delta_l,\ j_s;\ t)]\\&=\varphi(\Delta_l,\ j;\ t)-\varphi(\Delta_l,\ i;\ t)\end{aligned} \tag{6.3.16}$$

与$L(t)$的选择无关。故$a(t)$是路径无关的。

定义6.3.3. 称$a(t)$是弱可配称的，如果存在T上的函数族$V(t)=(v_i(t);\ i\in E)$，使得

$$v_i(t)>0,\ \forall t\in T,\ \forall i\in E. \tag{6.3.17}$$

$$v_i(t)a_{ij}(t)=v_j(t)a_{ji}(t),\ \forall t\in T,\ \forall i,\ j\in E. \tag{6.3.18}$$

此时称$V(t)$为$a(t)$的配称(函数)列。

定理6.3.3. $a(t)$弱可配称的充要条件是，它是路径无关的。

证明 必要性：设$a(t)$有配称列$\tilde{V}(t)=(\tilde{v}_i(t))$。又设

$$L(t):\ i=j_0\to j_1\to\cdots\to j_m\to j_{m+1}=j$$

是在时刻t从i到j的任一条路，则

$$\begin{aligned}\varphi(L(t)) &= \sum_{s=0}^{n}\varphi_{j_s j_{s+1}}(t)\\ &= \sum_{s=0}^{n}(\log a_{j_{s+1}j_s}(t)-\log a_{j_s j_{s+1}}(t))\\ &= \sum_{s=0}^{n}(\log\tilde{v}_{j_s}(t)-\log\tilde{v}_{j_{s+1}}(t))\\ &= \log\tilde{V}_i(t)-\log\tilde{V}_j(t) \qquad (6.3.19)\end{aligned}$$

不依赖于$L(t)$的选择。故$a(t)$路径无关。

充分性：由(6.3.11)和(6.3.13)知$(v_i(t))$是$a(t)$的一个配称列。证毕。

综合以上各条定理，我们得到：

定理6.3.4. 关于场$a(t)$，下述断言等价。

(i) $a(t)$有势；

(ii) $a(t)$路径无关；

(iii) $a(t)$弱可配称；

(iv) 条件(6.3.13)成立。

特别，我们有

定理6.3.5. 如果场$a(t)$在时刻t，E中任何两个元素i和j之间至多存在一条这样的路$L(t)=(i, i_1, i_2, \cdots, i_n, j)$，诸$i, i_1, i_2, \cdots, i_n, j$互不相同，则定理6.3.4中的(i)——(iv)都成立。

定义6.3.4. 称势场$a(t)$是保守场，如果它存在一个与t无关的势函数，而这种势函数称为保守势函数。

定理6.3.6. 如果$a(t)$的路$\mathscr{L}(t)$与t无关，并且它有保守势，则它的一切保守势可如下表出：

$$u_i=u_i(t_0)+c_I,\ i\in E_I,\ I\in D \qquad (6.3.20)$$

其中

$$u_i(t_0) = -\log v_i(t_0),\ i \in E_l,\ l \in D \qquad (6.3.21)$$

$c_l(l \in D)$是任意常数，t_0是T中的任意选定的元素。

证明 在定理假设条件下，(u_i)为$a(t)$的保守势的充要条件是：只要$i \to j$，就有

$$u_j - u_i = \varphi_{ij}(t) \quad \forall t \in T \qquad (6.3.22)$$

我们已有一个保守势，故上述条件又等价于

$$u_j - u_i = \varphi_{ij}(t_0) \quad \text{对某个} t_0 \in T \text{成立。} \qquad (6.3.23)$$

假定在$t_0 \in T$，$i \to j$且$i,\ j \in E_l(t_0)$，则还有

$$\begin{aligned} u_j(t_0) - u_i(t_0) &= \log v_i(t_0) - \log v_j(t_0) \\ &= \varphi(\Delta_l,\ j;\ t_0) - \varphi(\Delta_l,\ i;\ t_0) \\ &= \varphi_{ij}(t_0) \quad (i,j \in E_l(t_0)). \end{aligned} \qquad (6.3.24)$$

由(6.3.23)和(6.3.24)知道(6.3.20)给出保守势。在(6.3.24)中取$j = \Delta_l$便知每一保守势形如(6.3.20)。定理证毕。

容易证明，一个势场的势与配称列有如下关系。

定理6.3.7. 如果$(u_i(t))$是$a(t) = (a_{ij}(t))$的势，则$(e^{-u_i(t)})$是$a(t)$的配称列；反之，如果$(v_i(t))$是$a(t)$的配称列，则$(-\log v_i(t))$是$a(t)$的势。

§6.4. 二维格子点场

在本章§6.3中，我们已经找到了一个场成为势场的充要条件。在本节及下一节中，我们将对格子点场找出更为简洁的条件。本节的结果是下一节结果的特例，但由于它本身的重要性，我们还是单独抽出一节加以讨论。

取

$$E_1=(0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{6.4.1}$$

$$E_2=E_1\times E_1 \tag{6.4.2}$$

并用$(i,\ j)$，$(k,\ l)$或e，e'表E_2中的点。

定义6.4.1. 场 $a=(a(i,\ j;\ k,\ l);\ (i,\ j),\ (k,\ l)\in E_2)$称为(狭义)二维格子点场，如果它满足条件：

$$a(i,\ j;\ k,\ l)>0,\quad \forall(k,\ l)\in F_{ij},\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.3}$$

$$a(i,\ j;\ k,\ l)=0,\quad \forall(k,\ l)\in \bar{F}_{ij}\cup\{(i,\ j)\},\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.4}$$

其中

$$F_{ij}=\{(i,\ j-1),\ (i-1,\ j),\ (i,\ j+1),\ (i+1,\ j)\},\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.5}$$

显然，狭义二维格子场是不可约的。

定理6.4.1. 狭义二维格子点场有势的充要条件是

$$a(i,\ j;\ i+1,\ j)a(i+1,\ j;\ i+1,\ j+1)a(i+1,\ j+1;\ i,\ j+1)a(i,\ j+1;\ i,\ j)=a(i,\ j;\ i,\ j+1)\ a(i,\ j+1;\ i+1,\ j+1)\ a(i+1,j+1;\ i+1,\ j)a(i+1,\ j;\ i,\ j)\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \tag{6.4.6}$$

证明 记

$$L_{ij}:\ (i,\ j)\to(i+1,\ j)\to(i+1,\ j+1)\to(i,\ j+1)\to(i,\ j) \tag{6.4.7}$$

则(6.4.6)等价于

$$\varphi(L_{ij})=0. \tag{6.4.8}$$

由定理6.3.4立知条件是必要的。往证充分性。设

$$L:\ e\to e_1\to e_2\to\cdots\to e_n\to e \tag{6.4.9}$$

是任一闭合回路。我们需要证明

$$\varphi(L)=0. \tag{6.4.10}$$

如果e, e_1, e_2, …, $e_n(n\geqslant 3)$互不相同，则我们称L是单圈的，否则称为复合回路。称回路

L': $e_1'\to e_2'\to\cdots\to e_{i-1}'\to e_i'\to e_{i-1}'\to\cdots\to e_1'$为$e_1'$和$e_i'$之间的对流回路。显然

$$\varphi(L')=0. \tag{6.4.11}$$

由于每一个复合闭回路可以分解成若干个单圈闭回路和若干个对流回路。于是，我们只需就单圈闭回路证明(6.4.10)便已足够。

今设L是形如(6.4.9)的单圈。记其长度为l。易见$l\geqslant 4$。如果$l=4$，则条件(6.4.6)表明(6.4.10)成立。今设对于$l\leqslant k-1$的单圈L已真，往证对$l=k\geqslant 5$亦真。显然一定存在一条穿过格子点且平行于坐标轴的直线L_0，它将L所围成的区域分成两部分。从e出发，设沿L第一次到达L_0的点为e_h；然后从e_h继续沿L走，我们将在某处离开L_0，设离开L_0之后，首次重新回到L_0的点是$e_l(l<k)$。以e_h和e_l为端点的线段把L所围成的区域分成两部分。同时也把L分成L'和L''两部分。设在L_0上夹在e_h和e_l之间的格子点依次为e_0', e_1', …, e_m' $(m\geqslant 0)$。

记

$$\widetilde{L}:\ e_h\to e_0'\to e_1'\to\cdots\to e_m'\to e_l \tag{6.4.12}$$

由于平面上两点间以直线的距离最短，故有

$$\widetilde{l}<l',\ \widetilde{l}<l'' \tag{6.4.13}$$

其中$\widetilde{l}$是$\widetilde{L}$的长度，其余类推。再记

$$\begin{aligned}L_1:\ & e\to e_1\to\cdots\to e_h\to e_0'\to e_1'\to\cdots\to e_m'\to\\ &\to e_l\to e_{l+1}\to\cdots\to e_n\to e\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

$$L_2:\ e_k\to e_{k+1}\to\cdots\to e_l\to e'_l\to\cdots\to e'_1\to e'_0\to e_k \qquad (6.4.15)$$

无妨设L_1和L_2都是单圈（否则，去掉对流部分，得到若干新的单圈，以这些单圈代替L_1和L_2，以下讨论更应成立）。于是由(6.4.13)知$l_1<l$，$l_2<l=k$。即

$$l_1\leqslant k-1,\quad l_2\leqslant k-1. \qquad (6.4.16)$$

由此及归纳假设知

$$\varphi(L_1)=\varphi(L_2)=0. \qquad (6.4.17)$$

但易见

$$\varphi(L)=\varphi(L_1)+\varphi(L_2). \qquad (6.4.18)$$

故(6.4.10)对于$l=k$的单圈也成立。于是，由归纳法知定理成立。

定理6.4.2. 如果狭义二维格子点场a有势，则它的势函数是$(-\log\pi(i,\ j):\ (i,\ j)\in E_2)$：

$$\pi(i,\ j)=\pi(0,\ 0)\prod_{l=\mathrm{sign}i}^{i}\frac{a(l-\mathrm{sign}l,\ 0;\ e,\ 0)}{a(l,\ 0;\ l-\mathrm{sign}i,\ 0)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=\mathrm{sign}j}^{j}\frac{a(i,\ k-\mathrm{sign}j;\ i,\ k)}{a(i,\ k;\ i,\ k-\mathrm{sign}j)} \qquad (6.4.19)$$

其中sign(·)是符号函数，$\pi(0,\ 0)$是任意正常数。

证明 我们只对$\forall(i,\ j)\in E_2$，$i>0$，$j>0$验证(6.4.19)，其余情况类似。取一条路

$$e_0=(0,\ 0)\to(1,\ 0)\to(2,\ 0)\to\cdots\to(i,\ 0)\to$$

$$\to(i,\ 1)\to(i,\ 2)\to\cdots\to(i,\ j)=e$$

则由(6.3.9)和(6.3.10)得

$$\hat{a}(e_0;\ e)=\prod_{l=1}^{i}a(l-1,\ 0;\ l,\ 0)\prod_{k=1}^{j}a(i,\ k-1;\ i,\ k)$$

(6.4.20)

$$\hat{a}(e;\ e_0)=\prod_{k=1}^{j}a(i,\ k;\ i,\ k-1)\prod_{l=1}^{i}a(l,\ 0;\ l-1,\ 0)$$

(6.4.21)

由(6.4.20)、(6.4.21)和定理6.3.6知本定理成立。

定义6.4.2. 场$a=(a(i,\ j;\ k,\ l),\ (i,\ j),\ (k,\ l)\in E_2)$称为二维格子点场，如果它满足条件(6.4.4)和

是\sum非\prod

$$\prod_{(k,\ l)\in F_{ij}}a(i,\ j;\ k,\ l)\neq 0,\quad \forall(i,\ j)\in E_2 \qquad (6.4.22)$$

并且不可约①。其中F_{ij}如(6.4.5)。

设L_1和L_2是两个单圈闭合回路，它们所围成的区域分别是Z_1和Z_2。如果Z_1与Z_2重合，我们就把L_1和L_2叫作类同的(因为它们至多是起点或方向不同)，否则称为非类同的；如果$Z_1\subset Z_2$，我们就称L_1含于L_2之中。如果在L_1内不含有任何非类同于L_1并且与L_1有某些公共边的单圈，则称L_1为一个单元。记$a=(a(i,\ j;\ k,\ l))$的单元的全体为$\underline{\underline{P}}$。

定理6.4.3. 二维格子点场$a=(a(i,\ j;\ k,\ l),\ (i,\ j),\ (k,\ l)\in E_2)$有势的充要条件是：对于每一个$L\in\underline{\underline{P}}$，

$$L;\ e\to e_1\to e_2\to\cdots\to e_n\to e$$

都有

①假定不可约只是为了讨论的方便，而并不失一般性。因为a零同，故总可把它分成若干不可约的类。

$$a(e,\ e_1)a(e_1,\ e_2)\cdots a(e_{n-1},\ e_n)a(e_n,\ e)$$
$$=a(e,\ e_n)a(e_n,\ e_{n-1})\cdots a(e_2,\ e_1)a(e_1,\ e)\quad(6.4.23)$$

即

$$\varphi(L)=0.\qquad(6.4.24)$$

证明 这里的证法与定理6.4.1的证法不同。那里考虑长度，而这里则考虑面积。

我们只须考虑单圈情形。

设L为任一单圈，

$$L=(e,\ e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ e)。$$

现在，我们用$S(L)$表示Z内所含单位正方形的个数，即Z的面积。自然$S(L)\geqslant 1$。如果L是一个单元，则由(6.4.24)知断言已真。假定对于$S(L)\leqslant k-1$的单圈L均有$\varphi(L)=0$。往证$S(L)=k$ $(k\geqslant 2)$的情形。无妨设L非单元。由于L是单圈，故它的每一条边必定属于且仅属于其一个含于L内的单元。设L含有的以$e\to e_1$为边的一个单元是$\tilde{L}$：$e\to e_1\to\cdots\to e_k\to e'_1\to e'_2\to\cdots\to e'_m\to e$。则由(6.4.24)知$\varphi(\tilde{L})=0$。记$L'=(e,\ e'_m,\ \cdots,\ e'_2,\ e'_1,\ e_k,\ e_{k+1},\ \cdots,\ e_n,\ e)$。则$\varphi(L')=\varphi(L)$。如果$L'$仍然是单圈，则由$S(L')=k-1$及归纳假设知断言成立。否则，去掉$L'$的对流部分，可分解成若干个单圈。每一个单圈$L''$的$S(L'')<k-1$。故由归纳假设断言亦真。定理的证明遂告完成。

§6.5. $N(\geqslant 2)$维格子点场

取

$$E_1=(0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ,\ \cdots\cdots)\qquad(6.5.1)$$

并用$e=(i_1, i_2, \cdots, i_N)$表$E_N$中的点。

定义6.5.1. 场$a=(a(e; e'), e, e' \in E_N)$称为(狭义)$N$维格子点场，如果它满足条件：

$$a(e; e')>0, \quad \forall e' \in F_e, \quad \forall e \in \mathbf{E}_N \tag{6.5.3}$$

$$a(e; e')=0, \quad \forall e' \notin F_e \cup \{e\}, \quad \forall e \in \mathbf{E}_N \tag{6.5.4}$$

其中

$$e=(i_1, i_2, \cdots, i_N) \tag{6.5.5}$$

$$F_e=\{(i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}, i_k+\delta_k, i_{k+1}, \cdots, i_N);$$
$$\delta_k=\pm 1, \ 1 \leqslant k \leqslant N\} \tag{6.5.6}$$

定理6.5.1. 狭义N维格子点场$a=(a(e; e'), e, e' \in \mathbf{E}_N)$有势的充要条件是

$$a(e; e_{k,l}^{(1)})a(e_{k,l}^{(1)}; e_{k,l}^{(2)})a(e_{k,l}^{(2)}; e_{k,l}^{(3)})a(e_{k,l}^{(3)}; e)$$
$$=a(e; e_{k,l}^{(3)})a(e_{k,l}^{(3)}; e_{k,l}^{(2)})a(e_{k,l}^{(2)}; e_{k,l}^{(1)})a(e_{k,l}^{(1)}; e),$$
$$1 \leqslant k < l \leqslant N, \quad \forall e \in \mathbf{E}_N \tag{6.5.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} e_{k,l}^{(1)} &= (i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k+1, i_{k+1}, \cdots, \\ &\quad i_{l-1}, i_l, i_{l+1}, \cdots, i_N) \\ e_{k,l}^{(2)} &= (i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k+1, i_{k+1}, \cdots, \\ &\quad i_{l-1}, i_l+1, i_{l+1}, \cdots, i_N) \\ e_{k,l}^{(3)} &= (i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \cdots, \\ &\quad i_{l-1}, i_l+1, i_{l+1}, \cdots, i_N) \end{aligned}\right\} \tag{6.5.8}$$

证明 显然只需讨论单圈(定义如上)情形。设$\mathrm{L}=(e, e_1, e_2, \cdots, e_n, e)$是单圈的。记它的长度为$l$。易见$l \geqslant 4$。如果$l=4$，则条件(6.5.7)表明$\varphi(\mathrm{L})=0$。如果$l>4$，但L为一个$N$维单位正方体所包围（即L为这个单位正方体的一些棱组成的闭合回路），则容易由条

件(6.5.7)直接验证$\varphi(L)=0$。因此，我们只需考虑不能为一个N维单位正方体所包围的那种单圈L。对于这种L，必定存在一个与坐标平面平行并通过格子点的平面 Z(二维超平面 (如$N\geqslant 3$)，或直线 ($N=2$))，将L分成两部分。从e出发，设沿L第一次到达Z的点是e_k，然后，从e_k继续沿L走，我们将在某处离开Z。设离开Z之后，首次返回Z的点是$e_l(l>k)$。则e_k和e_l将L分成两部分，一部分是

$$L_1=(e,\ e_1,\ \cdots,\ e_k)\ 及\ L_2=(e_l,\ e_{l+1},\ \cdots,\ e_n,\ e);$$

另一部分是

$$L_3=(e_k,\ e_{k+1},\ \cdots,\ e_l)。$$

在平面Z上，取定一条从e_k到e_l的最短路 $L_4=(e_k,e_1',\ e_2',\ \cdots,\ e_s',\ e_l)$。我们说$l_3$(它是$L_3$的长度，以下类推)$\geqslant l_4$。事实上，将$L_3$投影于平面Z得$L_3'$；由$L_4$的最短性质立知$l_4\leqslant l_3'$；由此易见$l_3>l_4$。类似地有$l_1+l_2>l_4$。记

$$L_5=(e,\ e_1,\ \cdots,\ e_k,\ e_1',\ e_2',\ \cdots,\ e_s',e_l,e_{l+1},\cdots,e_n,\ e)$$

$$L_6=(e_k,\ e_{k+1},\ \cdots,\ e_l,\ e_s',\ e_{s-1}'\cdots,\ e_1',\ e_k)$$

则$l_5<l$且$l_6<l$，并且$\varphi(L)=\varphi(L_5)+\varphi(L_6)$。由此事实及数学归纳法立知$\varphi(L)=0$。定理证毕。

定理6.5.2。如果N维格子点场$a=(a(e,e'),\ e,e'\in E_N)$有势，则它的势函数为$(-\log\pi_e,\ e\in E_N)$：

$$\pi_e=\pi_{e_0}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=signi_k}^{i_k}\frac{a(e_k,l-sign i_k;e_k,e)}{a(e_k,l;e_k,l-sign i_k)},$$

$$e\in E_N。\qquad (6.5.9)$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&e_0 = e_{10} = (0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\
&e_{1.signi_1} = (\mathrm{signi}_1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\
&e_{1.2signi_1} = (2\mathrm{signi}_1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&e_{1.i_1-signi_1} = (i_1 - \mathrm{signi}_1, 0,\ \cdots,\ 0)\\
&e_{1.i_1} = (i_1,\ 0,\ \cdots,\ 0) = e_{20}\\
&e_{2.signi_2} = (i_1,\ \mathrm{signi}_2,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\
&e_{2.2signi_2} = (i_1,\ 2\mathrm{signi}_2,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&e_{2i_2} = (i_1,\ i_2,\ 0,\ \cdots,\ 0) = e_{30}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&e_{Ni_N} = (i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_N) = e
\end{aligned}\right\} \quad (6.5.10)
$$

而 v_{e_0}是任意正常数。

证明 对于$\forall e \in \mathrm{E}_N$，取一条从$e_0$到$e$路为：

$$
\mathrm{L}_e = (e_0 = e_{10},\ e_{1.signi_1},\ e_{1.2signi_1},\ \cdots,\ e_{1i_1},\ e_{2.signi_2},\ \cdots,\ e_{2i_2},\ \cdots,\ e_{Ni_N} = e)
$$

则

$$
\hat{a}(e_0,\ e) = \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=signi_k}^{i_k} a(e_{k,l-signi_k},\ e_{k,l}) \quad (6.5.11)
$$

$$
\hat{a}(e,\ e_0) = \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=signi_k}^{i_k} a(e_{k,l},\ e_{k,l-signi_k}) \quad (6.5.12)
$$

故由定理6.3.6立得本定理。

定义6.5.2. 称场 $a = (a(e,\ e') :\ e,\ e' \in \mathrm{E}_N)$ 为N 维格子点

场，如果它满足条件(6.5.4)及

\sum not \prod

$$\prod_{e' \in F_e} a(e;\ e') \neq 0,\quad \forall e \in E_N \tag{6.5.13}$$

并且不可约。其中F_e如(6.5.6)。

设$L=(e=e_0,\ e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ e_{n+1}=e)$为$a=(a(e;\ e'))$的单圈。L的每一条边 $e_k \to e_{k+1}\ (0 \leqslant k \leqslant n)$ 都是某个N维单位正方体的棱。因此，存在若干个N维单位正方体，它们的棱包含了L的每一条边。此时我们称这些正方体复盖L，设$V(L)$为复盖L的N维单位正方体的一个集合，其个数记作${}_mV(L)$。称$V(L)$为L的一个最小复盖，如果对于L的任一复盖$V'(L)$，都有${}_mV(L) \leqslant {}_mV'(L)$。L的最小复盖记作$V_0(L)$。它所包含的$N$维单位正方体的个数记作$l={}_mV_0(L)$。对于一个给定的L，相应的最小复盖$V_0(L)$不必唯一，但$l$却是唯一确定的。

今设L'是另一个单圈。称L'与L相连，如果L'的某些边与L的某些边重合（只谈"边"时，不管它的方向如何；谈"路"时带有方向）。现在，我们假定L'与L相连。设$V_0(L)$是L的一个最小复盖，它也复盖L'。记$V_0(L)$中复盖L'的N维单位正方体之集为$V'(L)$；将L和L'合并起来，并将L和L'的重合部分去掉，我们得到一个新的单圈L''，相应的有$V''(L)$。如果存在L的一个最小复盖$V_0(L)$，使得如上得到的$V'(L)$和$V''(L)$满足

$$ {}_mV'(L) < l,\quad {}_mV''(L) < l \tag{6.5.14}$$

我们就称L是非单元的。否则称之为(a的) 单元。记a的一切单元之集为$\underline{\underline{P}}$。

定理6.5.3. N维格子点场$a=(a(e;\ e'),\ e,\ e' \in E_N)$有势的充要条件是

$$\varphi(L)=0,\quad \forall L \in \underline{\underline{P}} \tag{6.5.15}$$

证明 我们只需证明单圈情形。设L为任一单圈。若$l=1$，则L被一个N维单位正方体所复盖。在单位正方体内的任一单圈都是单元，故由(6.5.15)知$\varphi(L)=0$。今设对于$l\leqslant k-1(k\geqslant 2)$的单圈断言已真，往证$l=k$的情形。如果L是单元，则由(6.5.15)又得到$\varphi(L)=0$。因此无妨设$L$非单元。由前面的说明知，此时存在两个单圈$L'$和$L''$，使得

$$l'\leqslant_m V'(L)<l=k, \tag{6.5.16}$$

$$l''\leqslant_m V''(L)<l=k, \tag{6.5.17}$$

$$\varphi(L)=\varphi(L')+\varphi(L''). \tag{6.5.18}$$

由(6.5.16)，(6.5.17)和归纳假设知$\varphi(L')=\varphi(L'')=0$。故由(6.5.18)知$\varphi(L)=0$。定理得证。

§6.6. 有势马尔可夫链

从本节开始，我们将把前面所建立的场论应用于马尔可夫过程(默认所说的过程均指不中断过程，当然，绝大多数结论并不依赖于"不中断"的假设)。

设$X(\omega)=(x(n,\omega),\ n\geqslant 0)$是定义概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个齐次马尔可夫链，它的状态空间是$E$，$n(\geqslant 1)$阶转移概率矩阵为$P(n)=(p_{ij}(n),\ i,j\in E)$。

我们所关心的不是过程$X(\omega)$本身，而是它的n阶转移矩阵，称$P(n)$为零同的，如果

$$p_{ij}(n)>0\Leftrightarrow p_{ji}(n)>0,\quad \forall i,\ j\in E,$$

$$\forall\ n\in T. \tag{6.6.1}$$

定义6.6.1. 设$p(n)$零同。取$T=(1,2,\cdots)$，$a_{ij}(t)=p_{ij}(t)$，$t\in T$。则由本章 §6.2 所定义的场 $P(n)=(p_{ij}(n))$ 称为马尔可夫

链场.

由定理6.3.4立即得到

定理6.6.1. 关于马尔可夫链场$P(n)=(p_{ij}(n))$,下述断言等价:

(i) $P(n)$ 有势;

(ii) $P(n)$ 路径无关;

(iii) $P(n)$ 弱可配称;

(iv) 对于$\forall n\in T$, $\forall l\in D(n)$, $\forall i,\ j\in E_l(n)$, 有

$$\hat{p}_{\Lambda_l i}(n)\,p_{ij}(n)\,\hat{p}_{j\Lambda_l}(n)=\hat{p}_{\Lambda_l j}(n)p_{ji}(n)\hat{p}_{i\Lambda_l}(n) \quad (6.6.2)$$

这里所用的记号的意义见本章§6.3.(注意以$(p_{ij}(n))$代替那里的$(q_{ij}(t))$.

下述定理是本节的主要结果.

定理6.6.2. 马尔可夫链场$P(n)=(p_{ij}(n))$的一切保守势(即与n无关的势)形如

$$u_i=-\log v_i(1)+c_l,\ l\in D(1),\ i\in E_l(1) \quad (6.6.3)$$

这里$c_l(l\in D(1))$为任意常数,其它符号的意义见本章§6.3.

证明 显然,我们只需证明$(-\log v_i(1))$是$P(n)$的势.为此,只需证明

$$v_i(1)p_{ij}(n)=v_j(1)p_{ji}(n),\forall n,\forall i,j\in E \quad (6.6.4)$$

由(6.3.11)和(6.6.3),我们已有

$$v_i(1)p_{ij}(1)=v_j(1)p_{ji}(1),\ \forall i,\ j\in E \quad (6.6.5)$$

于是,若假定(6.6.3)对$n-1$成立,则由*Kolmogorof-Chapman*方程得

$$\begin{aligned}v_i(1)p_{ij}(n)&=\sum_{k\in E}v_i(1)p_{ik}(n-1)p_{kj}(1)\\&=\sum_{k\in E}v_k(1)p_{ki}(n-1)p_{kj}(1)\end{aligned}$$

$$= v_j(1) \sum_{k \in E} p_{jk}(1)\, p_{ki}(n-1)$$

$$= v_j(1) p_{ji}(n). \qquad (6.6.6)$$

于是 (6.6.4) 对 n 亦真。定理得证。

在研究马尔可夫链场 $P(n)=(p_{ij}(n))$ 时，我们的主要兴趣是它的保守势。定理6.6.2表明，$P(n)$ 的保守势由 $P(1)$ 的势完全确定。故以后只讨论$P(1)$，并把$P(1)=(p_{ij}(1))$ 简记成 $P=(p_{ij})$。称之为链场(满足零同性条件)。

由定理6.6.1和定理6.6.2得

定理6.6.3. 对于链场$P=(p_{ij})$，下述断言等价：

(i) P有势；

(ii) P路径无关；

(iii) P弱可配称；

(iv) 对于$\forall l \in D$, $\forall i, j \in E_l$, 有

$$\hat{p}_{\Delta_l i}\, p_{ij}\, \hat{p}_{j\Delta_l} = \hat{p}_{\Delta_l j}\, p_{ji}\, \hat{p}_{i\Delta_l} \qquad (6.6.7)$$

而在有势的条件下，它的一切势函数形如：

$$u_i = -\log v_i + c_l,\ l \in D,\ i \in E_l \qquad (6.6.8)$$

其中

$$v_i = \begin{cases} \dfrac{\hat{p}_{\Delta_l i}}{\hat{p}_{i\Delta_l}}, & \text{如} i \in E_l,\ i \neq \Delta_l; \\ 1, & \text{如} i = \Delta_l \end{cases} \qquad (6.6.9)$$

而它的一切配称列形如 $(w_l v_i;\ l \in D,\ i \in E)$，这里的 $(w_l;\ l \in D)$ 是任意选定的正数列。

定义6.6.2. 设(u_i) 是$P=(p_{ij})$ 的任一势，命

$$w_i = exp(-u_i),\quad \forall i \in E. \tag{6.6.10}$$

则(w_i)是P的一个配称列，称之为由势(u_i)产生的配称列。

定理6.6.4. 链场$P=(p_{ij})$的每一个势(u_i)所产生的配称列w_i都是（P的）有限正调和测度。其意义是

$$0<w_i<\infty,\quad \forall i \in E. \tag{6.6.11}$$

$$w_i = \sum_{k\in E} w_k p_{ki},\quad \forall i \in E. \tag{6.6.12}$$

证明 前者显然。后者由(w_i)为配称列及$P=(p_{ij})$不中断导出。

由定理6.6.3立即得到

定理6.6.5. 马尔可夫链$P=(p_{ij})$可配称(即可逆)的充要条件是下述条件同时成立。

(i) P是零同的；

(ii) 定理6.6.3中的(i)—(iv)之一成立；

(iii) 对于每一个$l\in D$，

$$\pi_l^{-1} \triangleq \sum_{i\in E_l} \frac{\hat{p}_{\Delta_l i}}{\hat{p}_{i\Delta_l}} < \infty. \tag{6.6.13}$$

在P可配称时，若命

$$\pi_i^{(l)} = \frac{\hat{p}_{\Delta_l i}}{\hat{p}_{i\Delta_l}} \left(\sum_{j\in E_l} \frac{\hat{p}_{\Delta_l j}}{\hat{p}_{j\Delta_l}} \right)^{-1},\quad i\in E_l,\ l\in D \tag{6.6.14}$$

任意选取$w_l>0$，$\sum_{l\in D} w_l = 1$，并命

$$u_i = \pi_i^{(l)} w_l,\quad i\in E_l,\ l\in D \tag{6.6.15}$$

则(u_i)便是$P=(p_{ij})$的一个配称分布。而且一切配称分布形如(6.6.15)。如果$P=(p_{ij})$不可约，则(u_i)就是唯一的配称分布。

§6.7. 有势二元组随机徘徊

取

$$E_1=(0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{6.7.1}$$

$$E_2=E_1\times E_1 \tag{6.7.2}$$

定义6.7.1. 设$X(\omega)=\{x(n,\omega),\ n\geqslant 0\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的齐次马尔可夫链，其状态空间是$E_2$，转移矩阵是$P=(p_{(i,j),(k,l)};\ (i,j),\ (k,l)\in E_2)$，如果

$$\sum_{(k,l)\in F_{ij}\cup\{(i,j)\}} p_{(i,j),(k,l)}=1,\quad \forall(i,j)\in E_2 \tag{6.7.3}$$

$$p_{(i,j),(k,l)}>0,\forall(k,l)\in F_{ij},\forall(i,j)\in E_2 \tag{6.7.4}$$

$$p_{(i,j),(k,l)}=0,\quad \forall(k,l)\notin F_{ij}\cup\{(i,j)\}$$
$$\forall(i,j)\in E_2 \tag{6.7.5}$$

其中 $$F_{ij}=\{(i,j-1),(i,j+1),(i-1,j),(i+1,j)\},$$
$$(i,j)\in E_2 \tag{6.7.6}$$

则称$X(\omega)$（或$P=(p_{(i,j),(k,l)})$）为（狭义）二元组随机徘徊。

为书写方便，以后也把$p_{(i,j),(k,l)}$写成$p(i,j;\ k,l)$。

由定理6.6.3，定理6.4.1和定理6.4.2立即得到

定理6.7.1. 关于二元组随机徘徊$P=(p_{(i,j),(k,l)})$，下述断言等价：

（i）它有势；

(ii) 它路径无关；

(iii) 对于一切$(i,j)\in E_2$，有

$$p(i,j;i+1,j)\ p(i+1,j;i+1,j+1)\cdot$$

$$\cdot p(i+1,j+1;i,j+1)\ p(i,j+1,i,j)$$
$$=p(i,j;i,j+1)\ p(i,j+1;i+1,j+1)\cdot$$
$$\cdot p(i+1,j+1;i+1,j)\ p(i+1,j;i,j)。 \qquad (6.7.7)$$

若它有势，则势函数是 $(-\log\pi(i,j),\ (i,j)\in E_2)$，

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\prod_{l=sign i}^{i}\frac{p(l-sign i,0;l,0)}{p(l,0;l-sign i,0)}$$
$$\cdot\prod_{k=sign j}^{j}\frac{p(i,k-sign j;i,k)}{p(i,k;i,k-sign j)},$$
$$(i,j)\in E_2。 \qquad (6.7.8)$$

此处 $\pi(0,0)$ 是任意正常数。

定理6.7.2. 二元组随机徘徊 $P=(p(i,j;\ k,l))$ 可配称（即可逆）的充要条件是定理6.7.1中的(i)～(iv)之一成立，并且

$$(\pi(0,0))^{-1}\triangleq\sum_{(i,j)\in E_2}\prod_{l=sign i}^{i}\frac{p(l-sign i,0;l,0)}{p(l,0;l-sign i,0)}$$
$$\cdot\prod_{k=sign j}^{j}\frac{p(i,k-sign j;i,k)}{p(i,k;i,k-sign j)}<\infty。 \qquad (6.7.9)$$

在可配称时，唯一的配称分布是由这里的 $\pi(0,0)$ 和 (6.7.8)所定义的 $(\pi(i,j),\ (i,j)\in E_2)$。

例1 取

$$\left.\begin{aligned}&p(i,j;i+1,j)=p>0,\\&p(i,j;i-1,j)=q>0,\\&p(i,j;i,j+1)=r>0,\\&p(i,j;i,j-1)=s>0,\\&p(i,j;i,j)=t\geqslant 0,\\&p+q+r+s+t=1\end{aligned}\right\}\ \forall(i,j)\in E_2 \qquad (6.7.10)$$

显然，此时(6.7.7)式的两端都等于$pqrs$。故此随机徘徊有势。它的势函数是 $(-\log\pi(i,j),\ (i,j)\in E_2)$：

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\left(\frac{p}{q}\right)^i\left(\frac{r}{s}\right)^j \quad (i,j\in E_2) \tag{6.7.11}$$

在(6.7.10)的条件下，

$$\sum_{(i,j)\in E_2}\left(\frac{p}{q}\right)^i\left(\frac{r}{s}\right)^j\equiv\infty. \tag{6.7.12}$$

故由定理6.7.2知它不可逆。

例2 在上例中，取

$$p=q=r=s=\alpha,\ 0<\alpha\leqslant\frac{1}{4},\ t=1-4\alpha \tag{6.7.13}$$

则 $v(i,j)\equiv v(0,0)$。它也不可逆。

例3 取

$$\left.\begin{aligned}
p(i,j;\ i+1,j)&=\begin{cases}\alpha, & \text{当}i<0,\\ \beta, & \text{当}i\geqslant 0;\end{cases}\\
p(i,j;\ i,j+1)&=\begin{cases}\alpha, & \text{当}j<0,\\ \beta, & \text{当}j\geqslant 0;\end{cases}\\
p(i,j;\ i-1,j)&=\begin{cases}\alpha, & \text{当}i>0,\\ \beta, & \text{当}i\leqslant 0;\end{cases}\\
p(i,j;\ i,j-1)&=\begin{cases}\alpha, & \text{当}j>0,\\ \beta, & \text{当}j\leqslant 0;\end{cases}\\
p(i,j;\ i,j)&=\begin{cases}t, & \text{当}i=j=0,\\ \gamma, & \text{当}ij\neq 0,\\ \delta, & \text{当}ij=0.\end{cases}
\end{aligned}\right\}\quad \forall(i,j)\in E_2 \tag{6.7.14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &2\alpha+2\beta=1\\ &\alpha+3\beta+\delta=1\\ &4\beta+t=1\\ &\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\ \delta>0,\ t>0 \end{aligned}\right\} \tag{6.7.15}$$

则易见这个随机徘徊有势。它的势函数是

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{i\operatorname{sign} i+j\operatorname{sign} j}\qquad (i,j)\in E_2 \tag{6.7.16}$$

因为

$$\sum_{(i,j)\in E_2}\pi(i,j)=4\pi(0,0)\sum_{i>0}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{i}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{j} \tag{6.7.17}$$

故它可逆的充要条件是$\alpha>\beta$。

上述例子表明有势马尔可夫过程很多。即条件(6.7.7)(进而条件(6.3.13))是可实现的。另一方面，我们也已经看到，条件(6.7.7)在应用中是非常方便的。我们说，它已经不能再改进了。换言之，我们有

定理6.7.3. (6.7.7)中各条件独立。

证明 只需证明(6.7.7)中的任一条件不能由其它条件推出。为此，我们构造一个过程$P=(p(i,j;k,l))$，对于它来说，(6.7.7)中仅有一个条件（预先任意选定的）不成立，而其它一切条件都成立。

取$\bar{P}=(\bar{p}(i,j;k,l))$为例2中的有势马尔可夫链：

$$\bar{p}(i,j;i+1,j)=\bar{p}(i,j;i-1,j)=\bar{p}(i,j;i,j+1)$$
$$=\bar{p}(i,j;i,j-1)=\alpha \tag{6.7.18}$$

$$\bar{p}(i,j;i,j)=1-4\alpha \tag{6.7.19}$$

$$0<\alpha<\frac{1}{4} \tag{6.7.20}$$

它满足(6.7.7)中的一切条件。今取 $0<\varepsilon<min\left(3,\frac{1-3\alpha}{\alpha}\right)$，并命

$$p(i,j;k,l)=\begin{cases}1-3\alpha-\alpha\varepsilon, & \text{当}l=k=j=i\ \text{且}i\leqslant 0,\\ 1-3\alpha+\alpha\varepsilon, & \text{当}k=i,l=j=i-1\ \text{且}i\leqslant 0,\\ \bar{p}(i,j;k,l)\varepsilon, & \text{当}l=j=i,k=i+1\ \text{且}i\leqslant 0,\\ \bar{p}(i,j;k,l)\varepsilon^{-1}, & \text{当}l=k=i,j=i-1\ \text{且}i\leqslant 0,\\ \bar{p}(i,j;k,l), & \text{其它}.\end{cases} \tag{6.7.21}$$

则易见 $(p(i,j;k,l))$ 是二元组随机徘徊，并且

$$\begin{aligned}&p(0,0;1,0)\ p(1,0;1,1)\ p(1,1;0,1)\ p(0,1;0,0)\\ &=\bar{p}(0,0;1,0)\cdot\varepsilon\bar{p}(1,0;1,1)\bar{p}(1,1;0,1)\bar{p}(0,1;0,0)\\ &=\alpha^4\varepsilon,\end{aligned} \tag{6.7.22}$$

$$\begin{aligned}&p(0,0;0,1)\ p(0,1;1,1)\ p(1,1;1,0)\ p(1,0;0,0)\\ &=\bar{p}(0,0;0,1)\ \bar{p}(0,1;1,1)\ \bar{p}(1,1;1,0)\ \bar{p}(1,0;0,0)\\ &=\alpha^4.\end{aligned} \tag{6.7.23}$$

所以(6.7.7)中的条件对于 $(i,j)=(0,0)$不满足。但容易验证(6.7.7)中的其它条件均满足。注意在构造上述例子时，取$(i,j)=(0,0)$只是为了叙述的方便，构造的方法具有一般性。因此，定理已经证明。

二维随机徘徊的边界不象一维时那么简单，而是相当复杂的。下面，我们举两个例子予以说明。

例4 （单点边界）。

每一个常返二维随机徘徊都可以作为单点边界之例。上面的例子便是一例。

例5 （可列个边界）。

取

$$p(0,j;0,j-1)=p(0,j;0,j+1)=p(0,j;-1,j)$$
$$=p(0,j;+1,j)=\frac{1}{4},\quad \forall j\in E_1 \tag{6.7.24}$$

$$\left.\begin{aligned}p(i,j;\,i+1,\,j)&=\frac{3}{4}\\ p(i,j;\,i-1,\,j)&=\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}(i>0),\ \forall(i,j)\in E_2. \tag{6.7.25}$$

$$\left.\begin{aligned}p(i,j;\,i-1,\,j)&=\frac{3}{4}\\ p(i,j;\,i+1,\,j)&=\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}(i<0),\ \forall(i,j)\in E_2. \tag{6.7.26}$$

因为任意两点间只有一条无“对流”的路，故由定理 6.3.5 知它有势。今计算它的势。

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\Big/\left(\frac{1}{4}\right)^{j}$$
$$=\pi(0,0),\quad (i=0) \tag{6.7.27}$$

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}}$$
$$=\pi(0,0)3^{i-1}\qquad (i>0) \tag{6.7.28}$$

同理可得

$$\pi(i,j)=\pi(0,0)3^{|i|-1}\qquad (i<0) \tag{6.7.29}$$

于是

$$\sum_{(i,j)\in E_2}\pi(i,j)=+\infty. \tag{6.7.30}$$

所以此链非遍历．下面我们还将证明它是非常返的．

令

$$A_j=((i,j);\ -\infty<i<+\infty),$$
$$j=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{6.7.31}$$

往证

$$P(\bar{\mathscr{C}}(A_0))>0. \tag{6.7.32}$$

命

$$\bar{A}_0=\bigcup A_j\setminus A_0 \tag{6.7.33}$$

$$f^{*}_{(i,j)\bar{A}_0}=P(\exists n\geqslant 0,\ \text{使}\ x_n\in\bar{A}_0\mid x_0=(i,j)) \tag{6.7.34}$$

简记$f^{*}_{(i,0)\bar{A}_0}$为$f^{*}_{i\bar{A}_0}$．由[1，定理6.3.2]知$f^{*}_{i\bar{A}_0}(-\infty<i<+\infty)$为下列方程组的最小非负解．

$$\left.\begin{aligned}
x_0&=\frac{1}{4}x_{-1}+\frac{1}{4}x_{+1}+\frac{1}{2}\\
x_i&=\frac{3}{4}x_{i+1}+\frac{1}{4}x_{i-1}\qquad (i>0)\\
x_{-i}&=\frac{3}{4}x_{-(i+1)}+\frac{1}{4}x_{-(i-1)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.7.35}$$

由对称性知

$$x_i=x_{-i}\qquad (i>0) \tag{6.7.36}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}
x_0&=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\\
x_i&=\frac{3}{4}x_{i+1}+\frac{1}{4}x_{i-1}\qquad (i>0)\\
x_i&=x_{-i}
\end{aligned}\right\} \tag{6.7.37}$$

从而

$$\frac{3}{4}(x_{i-1}-x_i)=\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1})\quad(i>0)\qquad(6.7.38)$$

即

$$x_{i+1}-x_i=\frac{1}{3}(x_i-x_{i-1})$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^i(x_1-x_0)\quad(i>0)\qquad(6.7.39)$$

所以

$$x_{i+1}=\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k(x_1-x_0)+x_0,(i>0).\qquad(6.7.40)$$

由(6.7.37)的第一式和(6.7.40)得

$$x_{i+1}=\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k(x_0-1)+x_0,\ (i>0).\qquad(6.7.41)$$

即

$$x_{i+1}=\left(\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)x_0-\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k(i>0).\qquad(6.7.42)$$

上式为我们的方程组的一些解之表达式。而我们需要的是其中的最小非负解。欲使它为非负解，必须且只需

$$\left.\begin{array}{l}x_0\geqslant 0\\ \cdots\cdots\\ \left(\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)x_0-\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k\geqslant 0\end{array}\right\}\quad(i>0)\qquad(6.7.43)$$

即

$$x_0\geqslant\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k\Big/\left(\sum_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)\quad(i>0)\qquad(6.7.44)$$

由于 $y=\frac{x}{1+x}$ $(x\geqslant 0)$ 是 x 的增函数，故

$$x_0\geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k \Big/ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k+1\right)=\frac{2}{5}. \qquad (6.7.45)$$

今选$x_0=\frac{2}{5}$. 则由 (6.7.42) 定出方程组 (6.7.35) 之一非负解x_i $(-\infty<i<\infty)$,且

$$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ x_i\neq 0,\ x_i\neq 1\ (-\infty<i<+\infty), \qquad (6.7.46)$$

由于f^*x_i是方程组 (6.7.35) 的最小非负解，故

$$f^*x_i\neq 1 \qquad (i\geqslant 0) \qquad (6.7.47)$$

所以此链非常返，并且

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A_0))\neq 0. \qquad (6.7.48)$$

下面，我们证明A_0为几乎闭集，由(6.7.48)，只需证明

$$\overline{\mathscr{L}}(A_0)\doteq\overline{\mathscr{L}}(A_0). \qquad (6.7.49)$$

倘若 (6.7.49) 不真，则必有

$$P(x_i\in\{(0,+1),(0,-1)\}\text{无穷次})>0 \qquad (6.7.50)$$

但这与非常返性矛盾。

因为此链非常返，所以A_0之任意有限子集为不可回集。由此并参考[4，定理6.5.1]的证明易证至多有下列三种情况发生：

(i) A_0为一个原子几乎闭集且集$\{(i,0):-\infty<i<0\}$与集$\{(i,0):0<i<+\infty\}$ (或即集$\{(i,0):0\leqslant i<+\infty\}$) 都是不可回集；

(ii) A_0为一个原子几乎闭集，但$\{(i,0):-\infty<i<0\}$与

$\{(i,0);0<i<+\infty\}$ 中有一个是原子几乎闭集，一个是不可回集；

(iii) $\{(i,0);-\infty<i<0\}$ 与 $\{(i,0);0\leqslant i<+\infty\}$ 都是原子几乎闭集。

实际上，情况 (i) 和 (ii) 也不可能发生。若情况 (i) 发生，则集 $\{(0,+1),(0,-1)\}$ 到达无穷次的概率为正；这与非常返性矛盾；若情况 (ii) 发生，则这与我们链的“左右对称性”矛盾；所以只有情况 (iii) 才能发生。即 A_0 为两个原子几乎闭集所构成。同样，$A_j(-\infty<j<+\infty)$ 也为两个原子几乎闭集所构成。所以，我们这个链有无穷多个边界点，它们与原子几乎闭集

$$\{(i,j),j<0\},\ \{(i,j),j\geqslant 0\}.\qquad(-\infty<i<+\infty)$$

一一对应[1]。

§6.8. 有势 $N(\geqslant 2)$ 元组随机徘徊

定义6.8.1. 设 $X(\omega)=\{x(n,\omega),n\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的齐次马尔可夫链，其状态空间是 E_N，转移矩阵是 $P=(p(e,e'),e,e'\in E_N)$ 如果

$$\sum_{e'\in F_e\cup\{e\}} p(e,e')=1,\quad \forall e\in E_N.\qquad(6.8.1)$$

>0, \forall e'\in F_e \qquad \forall e\in E_N

$$p(e,e')=0,\quad \forall e'\in Fe\cup\{e\},\ \forall e\in E_N.\qquad(6.8.2)$$

(记号见 §6.5) 则称 $X(\omega)$ (或 $P=(p(e,e',),)$ 为 (狭义) N 元组随机徘徊。

(p(e, e'))

由定理6.3.4，定理6.5.1和定理6.5.2立即得到

定理6.8.1 对于 N 元组随机徘徊 $P=(p(e,e'),e,e'\in E_N)$，下

述断言等价：

(i) 它有势；

(ii) 它路径无关；

(iii) 它弱可配称；

(iv) 对于$\forall e\in E_N$，有

$$p(e;e_{k,l}^{(1)})p(e_{k,l}^{(1)};e_{k,l}^{(2)})p(e_{k,l}^{(2)};e_{k,l}^{(3)})p(e_{k,l}^{(3)};e)$$
$$=p(e;e_{k,l}^{(3)})p(e_{k,l}^{(3)};e_{k,l}^{(2)})p(e_{k,l}^{(2)};e_{k,l}^{(1)})p(e_{k,l}^{(1)};e)$$
$$1\leqslant k<l\leqslant N,\ \forall e\in E_N. \tag{6.8.3}$$

所用的记号见 (6.5.8)。如果它有势，则它的势函数是$(-\log\pi_e: e\in E_N)$：

$$\pi_e=\pi_{e_0}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=\mathrm{sign}\,i_k}^{i_k}\frac{p(e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k};e_{k,l})}{p(e_{k,l};e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k})} \tag{6.8.4}$$

记号见 (6.5.10)。此处π_{e_0}是任意正常数。

定理6.8.2. N元组随机徘徊$P=(p(e;e'))$可配称（可逆）的充要条件是定理6.8.1中的 (i)～(iv) 之一成立。并且

$$\pi_{e_0}^{-1}\triangleq\sum_{e\in E_N}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=\mathrm{sign}\,i_k}^{i_k}\frac{p(e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k\ \mathrm{sign}\,i_k};e_{k,l})}{p(e_{k,l};e_{k,l-\mathrm{sign}\,i_k})}<\infty. \tag{6.8.5}$$

若它可配称，则唯一配称分布是由这里的π_{e_0}和 (6.8.4) 所定义$(\pi_e,\ e\in E_N)$。

§6.9. 有势马尔可夫过程

设$X(\omega)=\{x(t,\ \omega),\ t\geqslant 0\}$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的齐次可列马尔可夫过程，其状态空间是$E$，转移矩阵是$P(t)=$

$(p_{ij}(t))$，

$$\left.\begin{aligned} &p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad \sum_{j\in E} p_{ij}(t)=1\\ &p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s)\\ &\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=p_{ij}(0) \end{aligned}\right\} \qquad (6.9.1)$$

其中 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0(i\neq j)$。以后也称 $P(t)=(p_{ij}(t))$为马尔可夫过程。

称$P(t)$是零同的，如果

$$p_{ij}(t)>0\Leftrightarrow p_{ji}(t)>0。 \qquad (6.9.2)$$

定义6.9.1. 设$P(t)$零同。取$T=[0,\ \infty)$，$a_{ij}(t)=p_{ij}(t)$。则由本章§6.2所定义的场$P(t)=(p_{ij}(t))$ 称为马氏过程场。

熟知，$p_{ij}(t)$ 或者恒为零或者恒不为零。因此，马氏过程场 $P(t)$ 的路与t无关。即$\mathscr{L}(t)$不依赖于t。因此，$D(t)$，$E_l(t)$ 等均不依赖于t。以下就去掉这些记号中的t。

由定理6.3.4立即得到

定理6.9.1. 关于马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$，下述断言等价：

(i) $P(t)$有势；

(ii) $P(t)$路径无关；

(iii) $P(t)$弱可配称；

(iv) 对于$\forall l\in D$，$\forall i,\ j\in E_l$，有

$$\hat{p}_{\Delta_l i}(t)p_{ij}(t)\ \hat{p}_{j\Delta_l}(t)=\hat{p}_{\Delta_l j}(t)p_{ji}(t)\ \hat{p}_{i\Delta_l}(t)$$

$$\forall t\in T。 \qquad (6.9.3)$$

下面两条定理是本节的主要结果。

定理6.9.2 如果不可约马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$有势，则

它有一个保守势（$-\log v_i(1)$），并且它的一切势形如

$$u_i(t) = -\log v_i(1) + f(t) \qquad (6.9.4)$$

其中（$v_i(1)$）由（6.3.11.）所定义。$f(t)$为T上的函数。

证明 如果$P(t)$有势，则由（6.3.11）所定义的$(v_i(t))$是$P(t)$的一个配称列（由定理6.3.4及（6.3.13）），于是

$$v_i(t)p_{ij}(t) = v_j(t)p_{ji}(t) \quad \forall t \in T, \ \forall i, j \in E. \qquad (6.9.5)$$

然而

$$\begin{aligned} v_i(t)p_{ij}(2t) &= \sum_{k\in E} v_i(t)p_{ik}(t)p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k\in E} p_{ki}(t)v_k(t)p_{kj}(t) \\ &= v_j(t)\sum_{k\in E} p_{jk}(t)p_{ki}(t) \\ &= v_j(t)p_{ji}(t). \end{aligned} \qquad (6.9.6)$$

2t

由数学归纳法易见

$$v_i(t)p_{ij}(mt) = v_j(t)P_{ji}(mt), \quad \forall m \geqslant 1. \qquad (6.9.7)$$

注意我们取定Δ_l，并约定$v_{\Delta_l}(t) \equiv 1$（见(6.3.11)），以及$P(t)$不可约，从而有

$$v_i(mt) = v_i(t) = \hat{p}_{\Delta_l i}(t) / \hat{p}_{i\Delta_l}(t), \qquad (6.9.8)$$

进而

$$v_i\left(\frac{m}{n}\right) = v_i(1) = \hat{p}_{\Delta_l i}(1) / \hat{p}_{i\Delta_l}(1), \quad \forall m, n. \qquad (6.9.9)$$

(6.9.8) 表明$v_i(t)$连续，而 (6.9.9) 表明它在有理点上取常数值$v_i(1)$。从而

$$v_i(t) \equiv v_i(1), \quad \forall t \in T \qquad (6.9.10)$$

今设$(\tilde{u}_i(t))$是$P(t)$的任一势，则因$P(t)$不可约，故

$$\widetilde{u}_i(t) - \widetilde{u}_{i_1}(t) = -\log v_i(t) + \log v_{i_1}(t)$$

$$= -\log v_i(1) \qquad (6.9.11)$$

它形如 (6.9.4)。至于由 (6.9.4) 所定义的 $(u_i(t))$ 是势则是显然的。

定理6.9.3. 如果马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$ 有势，则它有一个保守势 $(-\log v_i(1))$，并且它的一切势形如

$$u_i(t) = -\log v_i(1) + f_l(t),\ j \in E_l,\ l \in D. \qquad (6.9.12)$$

其中$(v_i(1))$ 由(6.3.11)所定义。$(f_l(t), l \in D)$是T上的一族函数。

证明 易由定理6.9.2推出。

推论1 马氏过程场 $P(t)=(P_{ij}(t))$ 的势由它的保守势完全决定，进而由 $P(1)$ 的势 $(v_i(1))$完全决定。

推论2 马氏过程 $(p_{ij}(t))$ 有配称函数列 $(u_i(t))$ 等价于它有配称数列 $(u_i>0, i\in E)$。

自此以后，凡弱可配称均指它有配称（数）列。

同定理6.6.4一样，我们有

定理6.9.4. 马氏过程场$P(t)=(p_{ij}(t))$ 的每一个保守势 (u_i) 所产生的配称列都是 $(P(t)$的) 有限正调和测度。

定理6.9.5. 马氏过程$P(t)=(p_{ij}(t))$ 可配称的充要条件是下述诸条件同时成立。

(i) $P(t)$零同；

(ii) 定理6.9.1中的(i)～(iv) 之一成立；

(iii) 对于任意选定的$t_0>0$，对于$\forall l \in D$，有

$$\pi_l^{-1} \triangleq \sum_{i \in E_l} \frac{\hat{p}_{i_1 i}(t_0)}{\hat{p}_{i i_1}(t_0)} < \infty \qquad (6.9.14)$$

在可配称时，配称分布为 $(v_i(t_0)w_l\pi_l;\ i\in E_l,\ l\in D)$ 此处 $(w_l;\ l\in D)$是任意选定的D上的一个正分布。

§6.10. 有势Q矩阵

命$a(t)\equiv Q=(q_{ij})$。由定理6.3.4得

定理6.10.1. 设Q是一个零同的Q矩阵，则下述断言等价：

(i) Q有势；

(ii) Q路径无关；

(iii) Q弱可配称；

(iv) 对于$\forall l\in D$，$\forall i,\ j\in E$，有

$$\hat{q}_{\Delta_l i}q_{ij}\hat{q}_{j\Delta_l}=\hat{q}_{\Delta_l j}q_{ji}\hat{q}_{i\Delta_l}. \tag{6.10.1}$$

定理6.10.2. Q矩阵Q可配称的充要条件是下述诸条件同时成立：

(i) Q零同；

(ii) 定理6.10.1中的(i)～(iv)之一成立；

(iii) 对于每一个$l\in D$，有

$$\pi_l^{-1}\triangleq\sum_{i\in E_l}\frac{\hat{q}_{\Delta_l i}}{\hat{q}_{i\Delta_l}}<\infty \tag{6.10.2}$$

在可配称时，任选$(w_l>0,\ l\in D)$使$\sum_{l\in D}w_l=1$，则$(v_iw_l\pi_l;\ i\in E_l,\ l\in D)$便是$Q$的配称分布。其中$(v_i)$由(6.3.11)所定义。

定义6.10.1. 称Q矩阵$Q=(q_{ij})$为二元组生灭Q矩阵，如果它满足

$$q(i,\ j;\ k,\ l)>0,\ \forall(k,\ l)\in F_{ij},\ \forall(i,\ j)\in E_2.$$

(6.10.3)

$$q(i,\ j;\ k,\ l)=0,\ \forall(k,\ l)\overline{\in}F_{ij}\cup\{\ (i,\ j)\ \},$$
$$\forall(i.\ j)\ \in E_2. \qquad (6.10.4)$$

其中

$$F_{ij}=\{\ (i,\ j-1),\ (i-1,\ j),\ (i,\ j+1),\ (i+1,\ i)\ \},$$
$$(i,\ j)\ \in E_2. \qquad (6.10.5)$$

如果它还满足

$$\sum_{(k,l)\in F_{ij}\cup\{(i,j)\}} q(i,\ j;\ k,\ l)=0,\ \forall(i,j)\in E_2.$$

(6.10.6)

则称之为保守的，否则称之为非保守的。

定理6.10.3. 对于二元组生灭Q矩阵，下述断言等价。

(i) 它有势；

(ii) 它路径无关；

(iii) 它弱可配称；

(iv) 对于一切 $(i,\ j)\in E_2$，有

$$q(i,\ j;\ i+1,\ j)\ q(i+1,\ j;\ i+1,\ i+1)q(i+1,\ j+1;$$
$$i,\ j+1)q(i,\ j+1;\ i,\ j)$$
$$=q(i,\ j;\ i,\ j+1)q(i,\ j+1;\ i+1,\ j+1)q(i+1,\ j+1;$$
$$i+1,\ j)q(i+1,\ j;\ i,\ j) \qquad (6.10.7)$$

如果它有势，则它的势函数是 $(-\log\pi(i,\ j))$：

$$\pi(i,\ j)=\pi(0,\ 0)\prod_{i-\mathrm{sign}i}^{i}\frac{q(l-\mathrm{sign}i,0;l,0}{q(l,0;l-\mathrm{sign}i,0)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{j-\mathrm{sign}j}^{j}\frac{q(i,k-\mathrm{sign}j;i,k)}{q(i,k;i,k-\mathrm{sign}j)} \qquad (6.10.8)$$

其中$\pi(0,0)$是任意正常数.

定理6.10.4. 二元组生灭Q矩阵可配称的充要条件是定理6.10.3中的(i)～(iv)之一成立，并且

$$(\pi(0,0))^{-1}\triangleq\sum_{(i,j)\in E_2}\prod_{l=\operatorname{sign} i}^{i}\frac{q(l-\operatorname{sign} i,0;l,0)}{q(l,0;l-\operatorname{sign} i,0)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=\operatorname{sign} j}^{j}\frac{q(i,k-\operatorname{sign} j;i,k)}{q(i,k;i,k-\operatorname{sign} j)}<\infty \tag{6.10.9}$$

在可称配时，唯一的配称分布是由(6.10.8)和(6.10.9)所定出的$(\pi(i,j);\ (i,\ j)\in E_2)$.

类似地可以写出关于N元组生灭Q矩阵及其它一些Q矩阵的结果，我们不再赘述了.

§6.11. 有势Q过程

取

$$E=(0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{6.11.1}$$

定义6.11.1. 若以Q矩阵Q为密度矩阵的Q过程$P(t)=(p_{ij}(t))$有势，则称$P(t)$为有势Q过程.

§6.9中的全部结果自然都适用于Q过程. 此外易见

定理6.11.1. 如果Q过程$(p_{ij}(t))$有势(弱可配称，可配称)，则它的Q矩阵有势(弱可配称，可配称).

定理6.11.2.. 最小解$(p_{ij}^{\min}(t))$弱可配称的充要条件是它的Q矩阵弱可配称.

证明 与定理2.3.6的证法相同.

定理6.11.3. 设$P(t)=(p_{ij}(t))$是弱可配称Q过程，则对于某一对$i,\ j\in E$，

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj} \tag{6.11.2}$$

成立的充要条件是

$$p'_{ji}(t)=\sum_{k\in E}q_{jk}p'_{ki}(t) \tag{6.11.3}$$

成立

证明 与定理2.6.1的证法相同.

定理6.11.4. 如果Q保守、弱可配称并且Q过程唯一，则最小Q过程是有势的. 进而，这个有势最小Q过程可逆的充要条件是Q既约、可配称.

证明 由定理6.11.2及定理2.5.1立得本定理.

§6.12. 有势生灭(双边生灭)Q过程

仍取

$$E=(0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{6.12.1}$$

定理6.12.1. (保守生灭Q过程).

对于任给的一个保守生灭Q矩阵Q，要么有势(相应地，可逆)生灭Q过程不存在，要么恰好有一个. 详言之，在$R=+\infty$时，生灭Q过程唯一，这个唯一的Q过程就是最小Q过程；它是有势的；而且此时它还是可逆的充要条件是$\sum_{i\in E}\mu_i<\infty$. 在$R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$时，只有满足柯氏向前微分方程组的那个唯一生灭$Q$过程

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{\xi_\lambda(i)\xi_\lambda(j)\mu_j}{\lambda\sum_{i\in E}\xi_\lambda(i)\mu_i}\qquad(i,j\in E) \tag{6.12.2}$$

是有势的；而且它还是可逆的. 在其余情况($R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i=+\infty$)

下，不存在有势生灭Q过程；更不存在可逆生灭Q过程。

证明 由定理6.11.4立得 $R=+\infty$ 时之结论。由可逆Q过程必是有势Q过程及定理 3.1.3 立得 $R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$ 时之结论。当 $R<+\infty$，$\sum_{i\in E}\mu_i=+\infty$ 时，这时 Q 过程非唯一。但不存在满足柯氏向前微分方程组的(不断的) Q过程。故由定理6.11.3知，这时有势Q过程不存在。定理证毕。

定理6.12.2. (非保守生灭Q过程)

设Q非保守。当且仅当x_∞为正则时存在有势生灭 Q 过程。而在x_∞正则时，有势生灭Q过程唯一，它是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{(1-\lambda\xi_\lambda 1)(1-\lambda\xi_\lambda 1)'}{\lambda[1-\lambda\xi_\lambda 1,\ 1]} \tag{6.12.3}$$

并且它是可逆Q过程。

证明 由定理6.11.3，当x_∞流出时，在[2，定理5]中构造出来的Q过程的表达式中的参数$p=0$。再参考 定理3.2.1的证明过 程 立得我们的定理。

现在，取

$$E=(0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \tag{6.12.4}$$

定理6.12.3. (双边生灭Q过程)

(i) 设 $R_a=+\infty(a=1,\ 2)$。则这时Q过程唯一。这个唯一的 Q 过程是有势的。进而此时它可逆的充要条件是$\sum_{i\in E}\mu_i<+\infty$。

(ii) 设 $R_a=+\infty$，$R_b<+\infty(a\neq b)$。则这时存在有势Q过程的充要条件是 $S_b<+\infty$(即r_2正则)。在$S_b<+\infty$时有唯一的有势双边生灭Q过程，它就是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{\xi_{b\lambda}\xi'_{b\lambda}}{\lambda[\xi_{b\lambda},\ 1]}. \tag{6.12.5}$$

进而此时它可逆的充要条件是

$$(\sum_{i<0}\mu_i)\delta_{a,1}+(\sum_{i>0}\mu_i)\delta_{a,2}<+\infty. \qquad (6.12.6)$$

(iii) 设 $R_a<+\infty$，$R_b<+\infty$。这时存在有势 Q 过程的充要条件是 $S_a<+\infty$，$S_b<+\infty$。在 $S_a<+\infty$，$S_b<+\infty$ 时有无穷多个有势 Q 过程，它们是

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+\frac{(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})(\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda})'}{\lambda[\xi_{1\lambda}+\xi_{2\lambda},\ 1]} \qquad (6.12.7)$$

及

$$\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^*+[\xi_\lambda]'\mathfrak{M}_\lambda[\xi_\lambda']. \qquad (6.12.8)$$

其中

$$\mathfrak{M}_\lambda=m\begin{pmatrix}1+mU_\lambda^{11} & -1+mU_\lambda^{12}\\ -1+mU_\lambda^{21} & 1+mU_\lambda^{22}\end{pmatrix} \qquad (6.12.9)$$

m 是满足 $0<m<r_2-r_1$ 的任一实数。这时任一有势 Q 过程都是可逆的。

证明 (1) 由定理6.11.4立得(i)。

(2) $R_a=+\infty$，$R_b<+\infty$ 时，全部 Q 过程已在[3，§6]中构造出来。由[3]中的(6.2)和(6.11)以及有势 Q 过程 Π_λ 的对称性立得(ii)。

(3) 参看定理3.3.4相应部分的证明并注意[3]中的(8.32)式易证(iii)。

Actually, $$
(U_{\lambda}^{ab})\uparrow \matrix
\infty & \frac{1}{r_2-r_1}\\ \frac{1}{r_2-r_1} & \infty
\endmatrix $$

§6.13. 有势单流出Q过程

定义6.13.1. 对于一个 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$，如果它保守且方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda u_i-\sum_{j\in E}q_{ij}u_j=0\quad(\lambda>0)\\ &0\leqslant u_i\leqslant 1\quad(i\in E)\end{aligned}\right\} \qquad (6.13.1)$$

只有一个线性独立的非零解，则称Q为单流出的。这时的 Q 过程称为单流出 Q 过程。一个单流出 Q 过程若有势，就称为有势单流出Q过程。

定理6.13.1. 设Q为单流出Q矩阵，则存在有势单流出Q过程的充要条件是：Q弱可配称并且

$$\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<+\infty \quad (\lambda>0). \tag{6.13.2}$$

有势单流出Q过程存在时必定唯一，它就是

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_{k\in E}\pi_k x_k(\lambda)} \quad (i,j\in E) \tag{6.13.3}$$

其中 $\pi=(\pi_i)$是Q的配称列，而

$$x_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda). \quad (i\in E) \tag{6.13.4}$$

证明 Ⅰ）存在性。

i）充分性：〔5〕中找到了任一单流出Q过程的表现

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+x_i(\lambda)\frac{\sum_{k\in E}\alpha_k p_{kj}^{\min}(\lambda)+\xi_j(\lambda)}{\sum_{k\in E}\alpha_k(1-x_k(\lambda))+\lambda\sum_{k\in E}\xi_k(\lambda)}$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \tag{6.13.5}$$

其中

$$\alpha_k\geqslant 0,\ \sum_{k\in E}\alpha_k(1-x_k(\lambda))<+\infty, \tag{6.13.6}$$

$\xi_j(\lambda)$满足

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\xi_j(\lambda)-\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)q_{ij}=0\\&\xi_j(\lambda)\geqslant 0,\ \sum_{j\in E}\xi_j(\lambda)<+\infty\end{aligned}\right\} \tag{6.13.7}$$

及

$$\xi_j(\lambda)-\xi_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\xi_i(\mu)p_{ij}(\lambda)=0$$

$$(\lambda>0,\ \mu>0) \qquad (6.13.8)$$

又若$\alpha_k\equiv 0$ $(k\in E)$，则$\xi_j(\lambda)\not\equiv 0$.

今命

$$\xi_j(\lambda)=x_j(\lambda)\pi_j, \qquad (j\in E) \qquad (6.13.9)$$

由于Q单流出，所以

$$\xi_j(\lambda)=x_j(\lambda)\pi_j\not\equiv 0. \qquad (6.13.10)$$

注意$x_i(\lambda)$满足(6.13.1)，得

$$\lambda\xi_j(\lambda)-\sum_{i\in E}\xi_i(\lambda)q_{ij}=\lambda x_j(\lambda)\pi_j-\sum_{i\in E}x_i(\lambda)\pi_i q_{ij}$$

$$=\lambda x_j(\lambda)\pi_j-\sum_{i\in E}x_i(\lambda)\pi_j q_{ji}=0. \quad (j\in E,\lambda>0) \quad (6.13.11)$$

另一方面，由定理6.11.2知

$$\pi_i p_{ij}^{\min}(\lambda)=\pi_j p_{ji}^{\min}(\lambda), \quad (\lambda>0,\ i,\ j\in E) \qquad (6.13.12)$$

显见

$$x_j(\lambda)-x_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}p_{ji}^{\min}(\lambda)x_i(\mu)=0 \qquad (6.13.13)$$

得

$$\xi_j(\lambda)-\xi_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}\xi_i(\mu)p_{ij}^{\min}(\lambda)$$

$$=x_j(\lambda)\pi_j-x_j(\mu)\pi_j+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}x_i(\lambda)\pi_i p_{ij}^{\min}(\lambda)$$

$$=\pi_j\left[x_j(\lambda)-x_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}x_i(\lambda)p_{ij}^{\min}(\lambda)\right]$$

$$=0. \qquad (6.13.14)$$

由(6.13.10)，(6.13.2)，(6.13.11)和(6.13.14) 知 $\xi_j(\lambda)(j\in E,\ \lambda>0)$ 满足 (6.13.7) 和 (6.13.8)。并且$\xi_j(\lambda)\not\equiv 0(j\in E,\ \lambda>0)$。所以

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_{k\in E}x_k(\lambda)\pi_k}$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \qquad (6.13.15)$$

是一个Q过程。显然它是有势的。

ii) 必要性：

设已存在一有势Q过程$(p_{ij}(\lambda))$。则由定理6.11.1知Q矩阵Q弱可配称。往证(6.13.2)。

容易由表达式(6.13.5)导出，一个Q过程满足柯氏向前微分方程组的充要条件是 $\alpha_i=0$ $(i\in E)$。故由定理6.11.3知，有势Q过程$(p_{ij}(\lambda))$必呈如下形状

$$p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)\xi_j(\lambda)}{\lambda\sum_{k\in E}\xi_k(\lambda)}$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \qquad (6.13.16)$$

其中$\xi_j(\lambda)$满足(6.13.7)和(6.13.8)，并且$\xi_j(\lambda)\not\equiv 0(j\in E,\ \lambda>0)$。

由Q的弱可配称性及定理6.11.2知(6.13.12)成立。由此事实及(6.13.16)得

$$\pi_i x_i(\lambda)\xi_j(\lambda)=\pi_j x_j(\lambda)\xi_i(\lambda)$$

$$(i,\ j\in E,\ \lambda>0) \qquad (6.13.17)$$

令

$$D(\lambda)=(i;\ \xi_i(\lambda)>0) \qquad (6.13.18)$$

由(6.13.8)及$\xi_j(\lambda)\not\equiv 0$知

$$D(\lambda)\not\equiv\phi \qquad (\lambda>0) \qquad (6.13.19)$$

所以由(6.13.17)得

$$\frac{\pi_i x_i(\lambda)}{\xi_i(\lambda)}=\frac{\pi_j x_j(\lambda)}{\xi_j(\lambda)} \qquad (i,\ j\in D(\lambda)) \qquad (6.13.20)$$

从而

$$\frac{\pi_i x_i(\lambda)}{\xi_i(\lambda)}=c(\lambda)<+\infty \quad (i\in D(\lambda)) \qquad (6.13.21)$$

即

$$\pi_i x_i(\lambda)=c(\lambda)\xi_i(\lambda) \qquad (i\in D(\lambda)) \qquad (6.13.22)$$

由(6.13.19)和(6.13.22)得

$$\pi_i x_i(\lambda)\xi_j(\lambda) = \pi_j x_j(\lambda)\xi_i(\lambda) = c(\lambda)\xi_j(\lambda)\xi_i(\lambda)$$

$$(i \in E,\ j \in D(\lambda)) \qquad (6.13.23)$$

由(6.3.19)及

$$\xi_j(\lambda) \neq 0 \qquad (j \in D(\lambda)) \qquad (6.13.24)$$

得

$$\pi_i x_i(\lambda) = c(\lambda)\xi_i(\lambda) \qquad (i \in E) \qquad (6.13.25)$$

由$(\xi_j(\lambda))$满足(6.13.7)得

$$\sum_{i \in C} \xi_j(\lambda) < +\infty \qquad (\lambda > 0) \qquad (6.13.26)$$

由(6.13.21)，(6.13.25)和(6.13.26)得

$$\sum_{i \in E} \pi_i x_i(\lambda) = c(\lambda) \sum_{i \in E} \xi_i(\lambda) < +\infty \qquad (6.13.27)$$

于是(6.13.2)成立。至此，必要性得证。

Ⅱ）唯一性。

由(6.13.13)和Q为单流出知，对于任一λ，必存在$i_0 \in E$，使$x_{i_0}(\lambda) \neq 0$。于是由(6.13.25)知$c(\lambda) > 0$。由此及(6.13.21)得

$$0 < c^{-1}(\lambda) < +\infty \qquad (\lambda > 0) \qquad (6.13.28)$$

再由Ⅰ）中必要性部分的证明知，若$(\widetilde{p}_{ij}(\lambda))$为任一有势单流出$Q$过程，则必有

$$\widetilde{p}_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \frac{x_i(\lambda)c^{-1}(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda c^{-1}(\lambda)\sum_{k \in E} x_k(\lambda)\pi_k}$$

$$= p_{ij}^{\min}(\lambda) + \frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda \sum_{k \in E} x_k(\lambda)\pi_k},$$

$$(i,\ j \in E,\ \lambda > 0) \qquad (6.13.29)$$

于是由Ⅰ）中充分性部分的证明知这时有势Q过程只有一个。

以上讨论都是对于一个固定的满足条件(6.13.2)的配称列(π_i)而言的．我们已经证明，对于每一个满足(6.13.2)的配称列，有且仅有一个有势Q过程与之对应．现在的问题是：

①条件(6.13.2)是否与配称列的具体取法有关．即是否存在两个配称列(π_i)和(w_i)，使

$$\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<\infty, \tag{6.13.30}$$

但

$$\sum_{i\in E} w_i x_i(\lambda)=\infty. \tag{6.13.31}$$

② 满足条件(6.13.2)的不同的配称列所对应的有势Q过程是否相同？

先看①．因为Q弱可配称，故可分块．由Q单流出知，存在且仅存在一个子块Q_{l_0}，使得Q_{l_0}是单流出的，而其它子块$Q_l(l\in D, l\neq l_0)$都是零流出的．今设配称列(π_i)满足(6.13.2)，而(w_i)是Q的任一配称列．由Q_{l_0}既约知

$$w_i=c_{l_0}\pi_i,\quad \forall i\in E_{l_0} \tag{6.13.32}$$

其中c_{l_0}是一正常数．又由$Q_l(l\neq l_0)$既约零流出知

$$x_i(\lambda)\equiv 0,\ \forall i\in E_l,\ l\neq l_0,\ \forall\lambda>0 \tag{6.13.33}$$

于是

$$\sum_{i\in E} w_i x_i(\lambda)=c_{l_0}\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<\infty \tag{6.13.34}$$

故条件(6.13.2)与(π_i)的具体取法无关．

再看②．设配称列(π_i)和(w_i)满足(6.13.2)，它们相应的有势Q过程分别是$(p_{ij}(t))$和$(\tilde{p}_{ij}(t))$．往证

$$\tilde{p}_{ij}(t)\equiv p_{ij}(t),\ \forall i,\ j\in E,\ \forall t. \tag{6.13.35}$$

因为每一子块 $Q_l(l\in D,\ l\neq l_0)$ 既约零流出，故由Q过程的唯一性知

$$\widetilde{p}_{ij}(t)\equiv p_{ij}^{[l]}(t)\equiv p_{ij}(t),\quad \forall i,\ j\in E_l,\ l\neq l_0 \tag{6.13.36}$$

$$\sum_{j\in E_l}\widetilde{p}_{ij}(t)=\sum_{j\in E_l}p_{ij}^{[l]}(t)=\sum_{j\in E_l}p_{ij}(t)=1$$

$$\forall i\in E_l,\ l\neq l_0 \tag{6.13.37}$$

于是

$$\widetilde{p}_{ij}(t)\equiv 0\equiv p_{ij}(t),\quad i\in E_l,\ j\in E_{l_0},\ l\neq l_0. \tag{6.13.38}$$

由(6.13.38)和有势Q过程的弱可配称性知

$$\widetilde{p}_{ij}(t)\equiv p_{ij}(t)\equiv 0,\quad i\in E_{l_0},\ j\in E_l, l\neq l_0 \tag{6.13.39}$$

于是 $(\widetilde{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E_{l_0})$ 是一个单流出Q过程，并且有势。由(6.13.32)知，$(\widetilde{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E_{l_0})$ 也是一个相应于 $(\pi_i,\ i\in E_{l_0})$ 的有势Q过程。根据前面所证，相应于同一个配称列的有势 Q 过程唯一，故有

$$\widetilde{p}_{ij}(t)\equiv p_{ij}(t),\quad \forall i,\quad j\in E_{l_0} \tag{6.13.40}$$

由(6.13.36)，(6.13.38)，(6.13.39)和(6.13.40)知(6.13.35)成立。

至此，定理证毕。

参 考 文 献

〔1〕 侯振挺，郭青峰．齐次可列马尔可夫过程．科学出版社，1978.

〔2〕 杨超群，一类生灭过程，数学学报，15:1(1965)，9—31.

〔3〕 杨超群，双边生灭过程，南开大学学报，5:5(1964)，9—40.

〔4〕 杨超群，可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质，数学进展，7:4(1964)，397—424.

〔5〕 Reuter G. E. H. Denumerable Markov processes (I), J. London Math, Soc, 37(1959), 81—91.

可逆马尔可夫过程

作者（按姓氏笔划为序）
陈木法 汪培庄 侯振挺 郭青峰
钱 敏 钱敏平 龚光鲁
装帧设计：张小平

*

湖南科学技术出版社出版
湖南省新华书店发行
湖南省新华印刷二厂印刷

*

1979年8月第1版第1次印刷
字数：158,000 印数：1—7,000 印张：7.75
统一书号：13204·5 定价：0.85元

装帧设计：张小平

统一书号：13204·5
定　　价：0.85 元

KENIMAERKEFU
GUOCHENG

Chin. Ann. of Math.
3 (5) 1982

第五章 一般速度函数的有势性与可逆性

POTENTIALITY AND REVERSIBILITY FOR GENERAL SPEED FUNCTIONS (I)

YAN SHIJIAN CHEN MUFA
(*Beijing Normal University*)
DING WANDING
(*Anhui Normal University*)

§ 1. Introduction

At first the Markov processes with infinite particle systems were proposed as models for the temporal evolution of such systems[8]. Then several concrete models were discussed[7,10,15]. In this paper a general model which includes most of the known models is proposed. It may be regarded simultaneously as an extension and generalization for the probability model of the multivariate linear Master equation for non-equilibrium systems[2].

In general, people agree with the reversibility of Markov processes which depicts the detailed balance (or Gibbs state) in statistical mechanics, where the reversible measure is just the defailed balance state. Therefore these are quite important problems: When does a reversible measure exist? When does only one exist? How does one get the construction of all reversible measures?

For discrete state spaces, there are a lot of investigations in [6]. Hou and Chen have established an abstract field, they discovered that potentiality describes the essential character of reversibility, and they solved potentiality and reversibility for Markov chains by using the field. There are also a lot of investigations for the reversibility of the Markov processes with infinite particle systems, but the known results are so limited even for the spin-fiip processes or the exclusion processes (See [10]). Recently, Ding and Chen[1] use the method of the field to investigate reversibility for the spin-flip processes with the nearest-neighbour speed functions, and give a necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of the reversible measures.

In § 2 we first extend the field to abstract state spaces, then we discuss a localization of a field with product state spaces. In § 3 we introduce both the concept of the speed functions with finite range and the concept of quasi-reversibility. We

Manuscript received April 4, 1981.

show that quasi-reversibility is an extension of reversibility. In § 4 we investigate the relation between potentiality and quasireversibility for the speed functions with finite range, and prove that quasi-reversibility implies potentiality, and under (4.3) and (4.10) we prove that $\widetilde{\mathscr{G}} \subset \mathscr{G}(\mathscr{V})$, where $\widetilde{\mathscr{G}}$ is the closed convex hull in weak topology of all measures constructed by a specification $\mathscr{V}$, and $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ is the set of all Gibbs states for $\mathscr{V}$. We also prove that each element of $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ is a quasi-reversible measure. We give a construction of all quasi-reversible measures, and from this we obtain a necessary and sufficient condition for existence and uniqueness of the quasi-reversible measures.

We are glad to thank Liu Xiu-fang for her discussion with us.

§ 2. Extension of field theory

Hou and Chen have established an abstract field theory for countable state spaces. In this section, we will extend the theory to any state spaces and give some of its local properties.

Let X be a non-empty set, T be an index set, and function $a(\cdot, \cdot, \cdot): T \times X \times X \to R \triangleq (-\infty, +\infty)$ satisfy the following two hypotheses:

(1) $\forall x, \tilde{x} \in X$, $x \neq \tilde{x}$, $\forall t \in T$, $a(t, x, \tilde{x}) \geqslant 0$;

(2) $\forall x, \tilde{x} \in X$, $\forall t \in T$, $a(t, x, \tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow a(t, \tilde{x}, x) = 0$.

Given $x, \tilde{x} \in X$, $x \neq \tilde{x}$, $\tilde{x}$ is called reachable directly from x at time t and denoted by $x \xrightarrow{t} \tilde{x}$, if $a(t, x, \tilde{x}) > 0$. $\tilde{x}$ is called reachable from x at time t, and we write $x \overset{t}{\rightsquigarrow} \tilde{x}$, if there is a number of $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ in X such that $x \xrightarrow{t} x^{(1)} \xrightarrow{t} x^{(2)} \to \cdots \xrightarrow{t} x^{(n)} \xrightarrow{t} \tilde{x}$. And $L(t) \triangleq (x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}, \tilde{x})$ is called a path from x to $\tilde{x}$ at time t.

Let $\mathscr{A}(t) = \{a(t, x, \tilde{x}): x, \tilde{x} \in X\}$, $t \in T$. The set of all paths of $\mathscr{A}(t)$ is denoted by $\mathscr{L}(t)$. It is clear that $x \xrightarrow{t} \tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{x} \xrightarrow{t} x$, $x \overset{t}{\rightsquigarrow} \tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{x} \overset{t}{\rightsquigarrow} x$.

Define

(3) $\varphi(t, x, \tilde{x}) = \log a(t, x, \tilde{x}) - \log a(t, \tilde{x}, x)$, if $x \xrightarrow{t} \tilde{x}$;

(4) $\varphi(L(t)) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(t, x^{(k)}, x^{(k+1)})$, if $L(t) = (x \triangleq x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(n+1)} = \tilde{x}) \in \mathscr{L}(t)$.

$\Phi(t) \triangleq \{\varphi(t, x, \tilde{x}): x, \tilde{x} \in X\}$ where $\varphi(t, x, \tilde{x})$ is undefined when $\tilde{x}$ is not reachable directly at time t. Then $(X, \mathscr{A}(t), \mathscr{L}(t), \Phi(t))$ (simply, $\mathscr{A}(t)$) is called a field and $\varphi(L(t))$ is called the work done by $\mathscr{A}(t)$ along $L(t)$. $\mathscr{A}(t)$ is called a potential field (or $\mathscr{A}(t)$ has a potential), if there is a real-valued function $V(\cdot, \cdot): T \times X \to R$ such that

(5) $\forall x, \tilde{x} \in X$, $x \xrightarrow{t} \tilde{x}$, $\varphi(t, x, \tilde{x}) = V(t, \tilde{x}) - V(t, x)$.

Then $V(t) = \{V(t, x);\ x \in X\}$, $t \in T$ is called a potential function of the

potential field $\mathscr{A}(t)$. We say that $\mathscr{A}(t)$ is independent of the path if for any closed path $L(t)$ (i. e., $x^{(0)}=x^{(n+1)}$), $\varphi(L(t))=0$.

For and fixed $t\in T$, we define a relation "$\overset{t}{\sim}$" as follows:

(6) $\forall x, \tilde{x}\in X$, $x \overset{t}{\sim} x \Leftrightarrow x \overset{t}{\sim} x$ or $x=\tilde{x}$.

It is an equivalence relation. Thus, we may divide X into equivalent classes $\{X_l(t): l\in D(t)\}$. For each $l\in D(t)$, we choose $\Delta_l=\Delta_l(t)\in X_l(t)$ at will; for each $x\in X_l(t)$, $x\neq\Delta_l$, we also choose arbitrarily a path $L(t, \Delta_l, x)\triangleq(\Delta_l, x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}, x)$, and put

$$(7)\quad \begin{cases}\hat{a}(t, \Delta_l, x)\triangleq a(t, \Delta_l, x^{(1)})a(t, x^{(1)}, x^{(2)})\cdots a(t, x^{(k)}, x),\\ \hat{a}(t, x, \Delta_l)=a(t, x, x^{(k)})a(t, x^{(k)}, x^{(k-1)})\cdots a(t, x^{(1)}, \Delta_l).\end{cases}$$

Finally, $\mathscr{A}(t)$ is called weakly symmetrizable, if there is a family of real-valued functions $U(t)\triangleq\{u(t, x): x\in X\}$, $t\in T$ such that

(8) $\forall t\in T$, $\forall x\in X$, $u(t, x)>0$;

(9) $\forall t\in T$, $\forall x, \tilde{x}\in X$, $u(t, x)a(t, x, \tilde{x})=u(t, \tilde{x})a(t, \tilde{x}, x)$.

Then $U(t)$ is called a symmetrizing function of $\mathscr{A}(t)$.

(10) **Theorem.** *The following four statements are equivalent:*

(I) $\mathscr{A}(t)$ *is a potential field;*

(II) $\mathscr{A}(t)$ *is path-independent;*

(III) $\mathscr{A}(t)$ *is weakly symmetrizable;*

(IV) $\forall t\in T$, $\forall l\in D(t)$, $\forall x, \tilde{x}\in X_l(t)$.

(11) $\hat{a}(t, \Delta_l, x)a(t, x, \tilde{x})\hat{a}(t, \tilde{x}, \Delta_l)=\hat{a}(t, \Delta_l, \tilde{x})a(t, \tilde{x}, x)\hat{a}(t, x, \Delta_l)$. *When one of the statements holds,* $\lambda(\cdot, \cdot): T\times X\longrightarrow R$.

$$(12)\quad \lambda(t, x)\triangleq\begin{cases}1, & x=\Delta_l,\\ \dfrac{\hat{a}(t, \Delta_l, x)}{\hat{a}(t, x, \Delta_l)}, & x\neq\Delta_l,\ x\in X_l(t),\end{cases}\qquad t\in T,\ x\in X$$

is a weakly symmetrizing function, and $\log\lambda(\cdot, \cdot)$ *is a potential of* $\mathscr{A}(t)$. *Furthermore, if* $\lambda'(\cdot, \cdot)$ *is another weakly symmetrizing function, then there is an* $\alpha_l(t)>0$ *for each* $l\in D(t)$ *such that*

$$\lambda'(t, x)=\alpha_l(t)\lambda(t, x),\quad \forall x\in X_l(t).$$

Finally, $\mathscr{A}(t)$ *is a potential field if and only if* $\mathscr{A}(t)$ *restricted on* $X_l(t)$ *is a potential field for every* $l\in D(t)$.

Proof (I)$\Rightarrow$(II). Let $V(\cdot, \cdot)$ be a potential function of $\mathscr{A}(t)$, $L(t)=(x=x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}, x^{(n+1)}=x)$ be an arbitrary closed path, then

$$\varphi(L(t))=\sum_{k=0}^{n}\varphi(t, x^{(k)}, x^{(k+1)})=\sum_{k=0}^{n}[V(t, x^{(k+1)})-V(t, x^{(k)})]=0.$$

(II)$\Rightarrow$(IV). $\forall t\in T$, $\forall l\in D(t)$, $\forall x, \tilde{x}\in X$, (11) is trivial if $x \overset{t}{\not\to} \tilde{x}$. Suppose $x \overset{t}{\to} \tilde{x}$. For an arbitrary but fixed path $L(t, \Delta_l, x)$ from Δ_l to x and a path $L(t, \Delta_l, \tilde{x})$ from Δ_l to $\tilde{x}$, it follows, on account of (II), that

$$\varphi(L(t,\ \Delta_l,\ x))+\varphi(t,\ x,\ \tilde{x})=\varphi(L(t,\ \Delta_l,\ \tilde{x})).$$

So by (3), (4) and (7),

$$\log\left[\frac{\hat{a}(t,\ \Delta_l,\ x)}{\hat{a}(t,\ x,\ \Delta_l)}\cdot\frac{a(t,\ x,\ \tilde{x})}{a(t,\ \tilde{x},\ x)}\cdot\frac{\hat{a}(t,\ \tilde{x},\ \Delta_l)}{\hat{a}(t,\ \Delta_l,\ \tilde{x})}\right]=0,$$

hence (11) holds.

(IV)$\Rightarrow$(III). Since $a(t,\ x,\ \tilde{x})=a(t,\ \tilde{x},\ x)=0$ when x and $\tilde{x}$ do not belong to the same $X_l(t)$, $\lambda(\cdot,\ \cdot)$ is a weakly symmetrizing function of $\mathscr{A}(t)$ from (11) and (12).

(III)$\Rightarrow$(I). Let $u(\cdot,\ \cdot)$ be a weakly symmetrizing function. We take $V(t,\ x)\triangleq\log u(t,\ x)$, $t\in T$, $x\in X$. Then (5) follows from (9).

This proves the main part of the theorem, and it is very easy to check the truth of the other assertions

In the rest of this section we want to discuss the localization of a field with product state spaces.

Let S be an arbitriry set, $\mathscr{S}$ be the set of all subsets of S, $\mathscr{S}_f$ be the set of all finite subsets of S. Let Y_u be a non-empty set for every $u\in S$. Write $X=\prod_{u\in S}Y_u$, and let $(\prod_{u\in S}Y_u,\ \mathscr{A}(t),\ \mathscr{L}(t),\ \Phi(t))$ be a field which is called a product field. Simply, we will call $\mathscr{A}(t)$ a product field. $\mathscr{A}(t)$ is called a field with local character, if

(13) $\forall t\in T,\ x\xrightarrow{t}\tilde{x}\Rightarrow\{u\in S;\ x(u)\neq\tilde{x}(u)\}\in\mathscr{S}_f$.

Let $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $z\in\prod_{u\in S\setminus\Lambda}Y_u$. $\mathscr{A}(t)$ restricted on $\prod_{u\in\Lambda}Y_u\times\{z\}$ is denoted by $\mathscr{A}^z_\Lambda(t)\triangleq(a(t,\ x,\ \tilde{x});\ x,\ \tilde{x}\in\prod_{u\in\Lambda}Y_u\times\{z\})$. Similarly we have $\mathscr{L}^z_\Lambda(t)$ and $\Phi^z_\Lambda(t)$. We will call the field $(\prod_{u\in\Lambda}Y_u\times\{z\},\ \mathscr{A}^z_\Lambda(t),\ \mathscr{L}^z_\Lambda(t),\ \Phi^z_\Lambda(t))$ (simply, $(\mathscr{A}^z_\Lambda(t))$ a local field of $\mathscr{A}(t)$, A product field is called a local potential field, if $\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $\forall z\in\prod_{u\in S\setminus\Lambda}Y_u$, and $\mathscr{A}^z_\Lambda(t)$ is a potential field.

(14) **Theorem.** *A product field $\mathscr{A}(t)$ with local character is a potential field if and only if it is a local potential field.*

Proof Let $V(\cdot,\ \cdot)$ be a potential of $\mathscr{A}(t)$, then $V(\cdot,\ \cdot)$ restricted on $T\times(\prod_{u\in\Lambda}Y_u\times\{z\})$ is a potential of $\mathscr{A}^z_\Lambda(t)$, and $\mathscr{A}(t)$ is a local potential field. Conversely, it is enough to show that $\mathscr{A}(t)$ is path-independent. Let $L(t)=(x=x^{(0)},\ x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(n)},\ x^{(n+1)}=x)\in\mathscr{L}(t)$ be a closed path, then $\Lambda\triangleq\bigcup_{k=0}^{n}\{u\in S;\ x^{(k)}(u)\neq x^{(k+1)}(u)\}\in\mathscr{S}_f$ from (13). We write $z\triangleq x_{S\setminus\Lambda}$ (i. e., the projection of x on $\prod_{u\in S\setminus\Lambda}Y_u$), then $L(t)$ is also a path of $\mathscr{A}^z_\Lambda(t)$. Since the work done by the field $\mathscr{A}(t)$ alone $L(t)$ is the same as the work done by $\mathscr{A}^z_\Lambda(t)$ alone $L(t)$, and $\mathscr{A}^z_\Lambda(t)$ is a potential field, so $\varphi(L(t))=0$. The assertion is proved.

From this theorem, the potential problem of such $\mathscr{A}(t)$ reduces to one about countable state spaces when every Y_u is countable, and we can use[4].

§ 3. Reversibility and Quasi-Reversibility

In this section, we will discuss the relation between the reversibility of the transition function semigroup and the reversibiliiy of its generator. Then we will propose a quite general stochastic model for certain physical systems. The model includes spin-flip processes, exclusion processes and others. We will introduce a concept of quasi-reversibility for a semigroup generator, and shown that quasi-reversibility which is easily described is an extension of reversibility, and that they are equivalent under some conditions.

Chen[3] has proved that the reversibility of a stationary Markov process with stationary transition function $P(t, x, A)$ ($t\geqslant 0$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, $\mathscr{E}$ includes all singletons $\{x\}$) is equivalent to that

(1) $\forall f, g\in b\mathscr{E}$, $\int_E fP_t g d\mu=\int_E gP_t f d\mu$,

where $b\mathscr{E}$ is the set of all bounded $\mathscr{E}$-measurable functions, μ is a stationary measure, and

(2) $P_t f(x)=\int_E P(t, x, dy)f(y)$.

When (1) holds, we say that $P(t, x, A)$ is reversible with respct to μ, and μ is a reversible measure with respect to $P(t, x, A)$. Perhaps, what we can know first is neither Markov processes nor their transition functions, but their generators. Therefore we will first discuss the relation between the reversibility of $P(t, x, A)$ and that of its generator.

Let $(E, \mathscr{E})$ be the metric measurable space and $\mathscr{E}$ its Borel σ-field. $b\mathscr{E}$ is a Banach space with supremum norm $\|\cdot\|$. "$\xrightarrow{s}$" and "s-lim" denote strong convergence and strong limit respectively. We define the generator Ω of $\{P_t: t\geqslant 0\}$ as follows:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathscr{D}(\Omega)\triangleq\left\{f\in b\mathscr{E}: \dfrac{P_t f-f}{t}\xrightarrow{s} g\in b\mathscr{E}\right\}, \\ \Omega f\triangleq s\text{-}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}(P_t f-f),\ f\in\mathscr{D}(\Omega). \end{cases}$$

We will say that Ω is reversible with respect to probability measure μ if

(4) $\forall f, g\in\mathscr{D}(\Omega)$ $\int f\Omega g d\mu=\int g\Omega f d\mu$.

(5) Proposition.

(i) *If a (contraction) semigroup $\{P_t: t\geqslant 0\}$ on $b\mathscr{E}$ is reversible with respect to probability measure μ, then so is its generator.*

(ii) *Suppose that a linear operator Ω on $b\mathscr{E}$ satisfies the conditions of the Hille-Yosida theorem (for dissipative case), then it generates unique contraction semigroup*

$\{P_t: t\geqslant 0\}$. *If* Ω *is reversible with respect to probability measure* μ, *then so is* $\{P_t: t\geqslant 0\}$.

Proof (i), (3), strong convergence and dominated convergence theorem imply (i).

(ii). From Hille-Yosida theorem, we obtain

(6) $\forall f\in b\mathscr{E},\ P_t f=s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I-(t/n)\Omega)^{-n}f,$

and for every $\lambda>0$, and every $f,\ g\in b\mathscr{E}$ there are $\tilde{f},\ \tilde{g}\in\mathscr{D}(\Omega)$ such that $\tilde{f}=(I-\lambda\Omega)^{-1}f$ and $\tilde{g}=(I-\lambda\Omega)^{-1}g$. It follows from

(4) that

$$\int f(I-\lambda\Omega)^{-1}g\,d\mu=\int[(I-\lambda\Omega)\tilde{f}]\,\tilde{g}\,d\mu=\int[(I-\lambda\Omega)\tilde{g}]\,\tilde{f}\,d\mu$$
$$=\int g(I-\lambda\Omega)^{-1}f\,d\mu.$$

By induction, it follows that

$$\int f(I-\lambda\Omega)^{-n}g\,d\mu=\int g(I-\lambda\Omega)^{-n}f\,d\mu,\ \forall f,\ g\in b\mathscr{E},\ \forall\lambda>0,\ \forall n\geqslant 1.$$

Taking $\lambda=\frac{t}{n}$ and letting $n\to\infty$, We obtain (1) from (6).

(7) **Remark.** An analogue of proposition (5) is also true if $b\mathscr{E}$ is replaced by a proper subspace of $b\mathscr{E}$ (for example, the following $\mathscr{E}$).

(8) In our model Ω is described with some speed functions. Now we introduce several notations which will be used throughout the rest of this paper.

Let S be a countable set, so be Y_u for every $u\in S$. But $|Y_u|\geqslant 2,\ \forall u\in S$. We write $X(\Lambda)\triangleq\prod_{u\in\Lambda}Y_u$, in particular $X=X(S)$. The projection of x on $X(\Lambda)$ is denoted by x_Λ. We write x_u instead of $x_{(u)}$ for every $u\in S$. We topologize X by giving Y_u the discrete topology and X the resulting product topology. $\mathscr{F}_0(\Lambda)$ is the Borel σ-field on $X(\Lambda)$, it is also the product σ-field on $X(\Lambda)$. We write $\mathscr{F}(\Lambda)\triangleq\mathscr{F}_0(\Lambda)\times X(S\backslash\Lambda)$ which is a sub-σ-field of $\mathscr{F}\triangleq\mathscr{F}_0(S)$.

Let $\mathscr{B}(\Lambda)$ be the set of all bounded $\mathscr{F}(\Lambda)$-measurable functions, $\mathscr{B}\triangleq\mathscr{B}(S)$, and $\mathscr{S}$ and $\mathscr{S}_f$ be the same as in § 2. For each integer N, let $\mathscr{S}_N=\{\Lambda\in\mathscr{S}: |\Lambda|=N\}$, where $|\Lambda|$ is the number of members of Λ. We denote by $\mathscr{A}=\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}_f}\mathscr{B}(\Lambda)$ the set of bounded continuous cylinder functions on X, and by $\mathscr{C}=\mathscr{C}(X)$ the set of all bounded continous functions on X. Clearly $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}\subset\mathscr{B}$. We denote by $\mathscr{P}(X)$ the set of all probability measures on $(X,\ \mathscr{F})$. For every $\Lambda\in\mathscr{S},\ \mu\in\mathscr{P}(X),\ \mu_\Lambda$ denotes the projection of μ on $(X(\Lambda),\ \mathscr{F}_0(\Lambda))$, i. e.

$$\mu_\Lambda(F)\triangleq\mu(F\times X(S\backslash\Lambda)),\ \forall F\in\mathscr{F}_0(\Lambda).$$

Finally, we write ${}^y_\Lambda x=y\times x_{S\backslash\Lambda}$ for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ y\in X(\Lambda)$. From now on, N is fixed.

(9) **Definition.** *We call* $c(\cdot,\ \cdot,\ \cdot):\mathscr{S}_N\times X(\Lambda)\times X\to R^+=[0,\ \infty)$ *to be a speed function, if*

(10) $\forall y \in X(\Lambda)$, $c(\Lambda, y, \cdot)$ *is* $\mathscr{F}$*-measurable;*

(11) $\forall x \in X$, $c(\Lambda, y, x) = 0$ *if there is a* $u \in \Lambda$ *such that* $x_u = y_u$. *If* $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ *also satisfies*

(12) *Co-zero:* $c(\Lambda, y, x) = 0 \Leftrightarrow c(\Lambda, x_\Lambda, {}^y_\Lambda x) = 0$, *then we set*

(13) $$q(x, \tilde{x}) = \begin{cases} c(\Lambda, y, x), & \exists \Lambda \in \mathscr{S}_N,\ \exists y \in X(\Lambda) \text{ such that } {}^y_\Lambda x = \tilde{x}; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and as in § 2 *define a field* $Q = \{q(x, \tilde{x}) : x, \tilde{x} \in X\}$ *which is called a speed function field. Clearly the field has local character propertyfand from Theorem* (2.14) *we obtain.*

(14) **Proposition.** *A speed function field has a potential if and only if is a local potential field.*

(15) **Definition.** *A speed function field* Q *is said to be with finite range, if its speed function satisfies*

(16) $\forall \Lambda \in \mathscr{S}_N$, $\exists \tilde{\Lambda} \supset \Lambda$, $\tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}_f$ *such that* $\forall y \in X(\Lambda)$, $c(\Lambda, y, \cdot)$ *is* $\mathscr{F}(\tilde{\Lambda})$*-measurable.*

The minimal $\tilde{\Lambda}$ satisfying (16) is denoted by $r(\Lambda)$. Clearly every speed function with finite range is continuous. For every $x, \tilde{x} \in X$ from (16), we have $c(\Lambda, y, x) = c(\Lambda, y, \tilde{x})$ whenever $x_{\tilde{\Lambda}} = \tilde{x}_{\tilde{\Lambda}}$. So we often use $c(\Lambda, y, x_{\tilde{\Lambda}})$ instead of $c(\Lambda, y, x)$, and the cast of $q(x, \tilde{x})$ can be treated similarly.

(17) **Definition.** *Let* Q *be a speed function field with finite range. If there is* $\mu \in \mathscr{P}(X)$ *such that*

(18) $\forall \Lambda \in \mathscr{S}_f$, $\forall x \in X(\Lambda)$, $\mu_\Lambda(x) > 0$;

(19) $\forall \Lambda \in \mathscr{S}_N$, $\forall \tilde{\Lambda} \supset r(\Lambda)$, $y \in X(\Lambda)$, $x \in X(\tilde{\Lambda})$, *and we have*

$$\mu_{\tilde{\Lambda}}(x) c(\Lambda, y, x) = \mu_{\tilde{\Lambda}}({}^y_\Lambda x) c(\Lambda, x_\Lambda, {}^y_\Lambda x),$$

i. e.

$$\mu_{\tilde{\Lambda}}(x) q(x, {}^y_\Lambda x) = \mu_{\tilde{\Lambda}}({}^y_\Lambda x) q({}^y_\Lambda x, x),$$

then we say that Q *is quasi-reversible with respect to* μ, *and* μ *is a quasi-reversible measure for* Q.

(20) **Definition.** *Let* Q *be a speed function field satisfying*

(21) $\forall \Lambda \in \mathscr{S}_N$, $\forall x \in X$, $\sum_{y \in X(\Lambda)} c(\Lambda, y, x) \leqslant c(\Lambda)$,

(22) $\forall u \in S$, $\sum_{u \in \Lambda \in \mathscr{S}_N} c(\Lambda) < \infty$.

We define a linear operator $\Omega : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{B}$ as follows:

(23) $$\Omega f(x) \triangleq \sum_{\Lambda \in \mathscr{S}_N} \sum_{y \in X(\Lambda)} c(\Lambda, y, x) \Delta^y_\Lambda f(x),$$

where $\mathscr{D}(\Omega) \supset \mathscr{A}$, and $\Delta^y_\Lambda f(x) \triangleq f({}^y_\Lambda x) - f(x)$.

The closure $\bar{\Omega}$ of Ω is called reversible if there is $\mu \in \mathscr{P}(X)$ such that (18) and

(24) $\forall f, g \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$, $\int f \bar{\Omega} g \, d\mu = \int g \bar{\Omega} f \, d\mu$

hold. Then μ is said to be a reversible measure for $\bar{\Omega}$ (or Ω, or $c(\cdot, \cdot, \cdot)$).

Remark. When $\mathscr{D}$ is a core for $\bar{\Omega}$ (i. e., $\bar{\Omega}$ restricted on $\mathscr{D}$ and Ω have the same

closed extension), we can use $\mathscr{D}$ instead of $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ in (24). In particular, we can use $\mathscr{D}(\Omega)$ instead of $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ and Ω instead of $\bar{\Omega}$. For reversibility there is condition (18) in addition to (4). From now on, reversibility for speed function usually means Definition (20).

(25) **Theorem.** *Let Q be a speed function field with finite range. If Q is reversible with respect to μ, then Q is quasi-reversible with respect to μ.*

Proof Let $\Lambda\in\mathscr{S}_N$, $\tilde{\Lambda}\supset r(\Lambda)$; $z\in X(\tilde{\Lambda})$, $y\in X(\Lambda)$, $\forall u\in\Lambda$, $z_u\neq y_u$. Taking $f=I_{(z)\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})}$, $g=I_{({}^y_\Lambda z)\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})}$, for every $x\in\{{}^y_\Lambda z\}\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})$ we have

$$\begin{aligned}\Omega f(x)&=\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}_N}\sum_{w\in X(\Lambda')}c(\Lambda',w,x)\left[I_{(z)\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})}({}^w_{\Lambda'}x)-I_{(z)\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})}(x)\right]\\&=c(\Lambda,z_\Lambda,x)I_{(z)\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})}(z_\Lambda\times x_{S\setminus\Lambda}),\end{aligned}$$

hence

$$\int g\Omega f\,d\mu=\int_{({}^y_\Lambda z)\times X(S\setminus\Lambda)}c(\Lambda,z_\Lambda,x)\mu(dx)=c(\Lambda,z_\Lambda,{}^y_\Lambda z)\mu_{\tilde{\Lambda}}({}^y_\Lambda z).$$

Using ${}^y_\Lambda z$ instead of z in the preceding discussion, we obtain

$$\int f\Omega g\,d\mu=c(\Lambda,y,z)\mu_{\tilde{\Lambda}}(z).$$

So reversibility for Q implies quasi-reversibility for Q.

§ 4. Potentiality and Quasi-reversibility

In this section, we will discuss the relation between potentiality and quasi-reversibility for Q.

(1) **Theorem.** *Let Q be a speed function field with finite range. If Q is quasi-reversible, then it has a potential.*

Proof Let μ is a quasi-reversible measure for Q. We want to prove that Theorem (2.10) (iv) holds. Since field Q is independent of t, we can use $\to$, $\rightsquigarrow$, D and X_t instead of $\overset{t}{\to}$, $\overset{t}{\rightsquigarrow}$, $D(t)$ and $X_t(t)$ respectively.

From § 2, it is clear that $q(x,\tilde{x})=0$ whenever $x\not\to\tilde{x}$, and in this case (2.11) holds. It suffices to prove that (2.11) holds when $x\to\tilde{x}$. Therefore, by Definition (3.9), we may suppose $q(x,\tilde{x})>0$. Then there are $\Lambda\in\mathscr{S}_N$, $y\in X(\Lambda)$ such that $y_u\neq x_u$ for each $u\in\Lambda$ and $x={}^y_\Lambda x$. Hence $q(x,x)=c(\Lambda,y,x)$. From quasi-reversibility we have

(2) $\mu_{\tilde{\Lambda}}(x_{\tilde{\Lambda}})q(x,\tilde{x})=\mu_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{x}_{\tilde{\Lambda}})q(\tilde{x},x)$, $\forall\tilde{\Lambda}\supset r(\Lambda)$.

In § 2 we have taken and fixed the pathes $L(\Delta_l,x)=(\Delta_l=x^{(0)},x^{(1)},\cdots,x^{(n)},x^{(n+1)}=x)$ and $L(\Delta_l,\tilde{x})=(\Delta_l=\tilde{x}^{(0)},\tilde{x}^{(1)},\cdots,\tilde{x}^{(m)},\tilde{x}^{(m+1)}=\tilde{x})$. Using the preceding discussion for each segment $(x^{(k)}\to x^{(k+1)}$ called a segment of the path $L(\Delta_l,x))$, we can always take a $\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f$ such that (2) and the following equations all hold:

$$\mu_{\tilde{\Lambda}}(x^{(i)}_{\tilde{\Lambda}})q(x^{(i)},x^{(i+1)})=\mu_{\tilde{\Lambda}}(x^{(i+1)}_{\tilde{\Lambda}})q(x^{(i+1)},x^{(i)}),\quad i=0,1,\cdots,n,$$

$$\mu_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{x}_{\Lambda}^{(j)})q(\tilde{x}^{(j)}, \tilde{x}^{(j+1)}) = \mu_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{x}_{\Lambda}^{(j+1)})q(\tilde{x}^{(j+1)}, \tilde{x}^{(j)}), \quad j=0, 1, \cdots, m.$$

Hence

$$\mu_{\tilde{\Lambda}}((\Delta_l)_{\tilde{\Lambda}})\hat{q}(\Delta_l, x) = \mu_{\tilde{\Lambda}}(x_{\tilde{\Lambda}})\hat{q}(x, \Delta_l),$$
$$\mu_{\tilde{\Lambda}}((\Delta_l)_{\tilde{\Lambda}})\hat{q}(\Delta_l, \tilde{x}) = \mu_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{x}_{\tilde{\Lambda}})q(\tilde{x}, \Delta_l).$$

From this and (2), we obtain

$$\hat{q}(\Delta_l, x)q(x, \tilde{x})\hat{q}(\tilde{x}, \Delta_l) = \hat{q}(\Delta_l, x)q(x, \tilde{x})\hat{q}(\tilde{x}, \Delta_l).$$

This is Theorem (2.10) (iv), hence Q has a potential.

Until now, our hypotheses for the speed functions are (3.10), (3.11), (3.12), (3.16), (3.21) and (3.22). Conditions (3.10) and (3.11) are certainly necessary. Condition (3.12) is also necessary for potentiality. In order to make the closure of Ω be a semigroup generator, Conditions (3.21) and (3.22) are necessary, too (See the example in [10; II, § 1.1]). Therefore, the essential condition for the speed functions is (3.16).

In order to discuss the converse of (4.1), we have to use another hypothesis for the speed functions.

(3) **Hypothesis.** For every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, there is a $\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f$, $\tilde{\Lambda}\supset\Lambda$ such that for every $x, \tilde{x}\in X$, whenever $\{u; x_u\neq\tilde{x}_u\}\subset\Lambda$, there are $x^{(i)}$, $i=1, 2, \cdots, m$ such that $x\triangleq x^{(0)}\to x^{(1)}\to\cdots\to x^{(m)}\to x^{(m+1)}\triangleq x$ and $\{u; x_u^{(i)}\neq x_u^{(i+1)}\}\subset\tilde{\Lambda}$. Clearly, if $\tilde{\Lambda}$ satisfies the above condition, then every $\Lambda_1\supset\tilde{\Lambda}$ satisfies (3) too. So there are minimal sets satisfying (3). But the minimal sets may be not unique, so we choose arbitrary one of them and write it as $\delta(\Lambda)$. It is clear that $\delta(\Lambda)\supset\Lambda$.

(4) **Remark.** If there is $\Lambda_0\in\mathscr{S}_{N-1}$ such that $|Y_u|>2$ for each $u\in\Lambda_0$, then (3) may hold. For example, (3) is true when the condition "$y\in X(\Lambda)$, $|\Lambda|=N$, $\forall u\in\Lambda$, $y_u\neq x_u\Rightarrow c(\Lambda, y, x)>0$" holds.

However, (3) does not certainly hold when $|Y_u|\equiv 2 (u\in S)$. For example, we take $Y_u\equiv\{0, 1\}$, $N=2$; for every $\{u, v\}\subset S$, $y\in X(\{u, v\})$ we suppose $c(\{u, v\}, y, x)>0$ whenever $y_u\neq x_u$, $y_v\neq x_v$, B_y taking $x=(0, 0, 0)\times z$, $\tilde{x}=(1, 1, 1)\times z$, $z\in X(S\setminus\{u_1, u_2, u_3\})$, we have $x\sim\tilde{x}$, so (3) does not hold. But later we will discuss this case again in another way.

(5) **Remark.** Let Q be a speed function field, which satisfies (3), with finite range, then for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $x\in X$, $w\in X(\Lambda)$, $w\neq x_\Lambda$, there is certainly a path $L(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(n+1)})$ from $x^{(0)}=x$ to $x^{(n+1)}=w\times x_{S\setminus\Lambda}$ such that $\{u\in S; x_u^{(i)}\neq x_u^{(i+1)}\}\subset\delta(\Lambda)$, $0\leqslant i\leqslant n$. Put

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{q}(x^{(0)}, x^{(n+1)}) \triangleq \prod_{i=1}^{n} q(x^{(i)}, x^{(i+1)}), \\ \bar{q}(x^{(n+1)}, x^{(0)}) \triangleq \prod_{i=1}^{n} q(x^{(i+1)}, x^{(i)}) \end{cases}$$

and $\tilde{\Lambda}=\bigcup_{\substack{A\subset\delta(\Lambda)\\|A|=N}} r(A)$. Since Q has finite range, $\bar{q}(x, w\times x_{S\setminus\Lambda})$ and $\bar{q}(w\times x_{S\setminus\Lambda}, x)$ are $\mathscr{F}(\tilde{\Lambda})$-measurable, i. e.

$$(7)\quad \begin{cases} \forall x\in X,\ \forall w\in X(\Lambda),\ \bar{q}(x,\ w\times x_{S\setminus\Lambda})=\bar{q}(x_{\tilde{\Lambda}},\ w\times x_{\tilde{\Lambda}-\Lambda}), \\ \bar{q}(w\times x_{S\setminus\Lambda},\ x)=\bar{q}(w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda},\ x_{\tilde{\Lambda}}). \end{cases}$$

In addition, if Q has a potential, then it is clear by path-independence that

$$(8)\quad \forall w\in X(\Lambda),\ \lambda(x)\frac{\bar{q}(\tilde{x},\ w\times x_{S\setminus\Lambda})}{\bar{q}(w\times x_{S\setminus\Lambda},\ x)}=\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda}).$$

(9) **Corollary.** *Let Q be a speed function field which satisfies* (3) *and be quasi-reversible, then we have*

$$(10)\quad \forall\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ \sum_{w\in X(\Lambda)}\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda})<\infty.$$

Proof Unsing the notation in Remark (5), from (2) we obtain

$$\mu_{\tilde{\Lambda}}(x_{\Lambda}^{(i)})q(x^{(i)},\ x^{(i+1)})=\mu_{\tilde{\Lambda}}(x_{\Lambda}^{(i+1)})q(x^{(i+1)},\ x^{(i)}),\ 0\leqslant i\leqslant n.$$

So, for every $w\in X(\Lambda)$ we have

$$\mu_{\tilde{\Lambda}}(x_{\tilde{\Lambda}})\bar{q}(x,\ w\times x_{S\setminus\Lambda})=\mu_{\tilde{\Lambda}}(w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda})\bar{q}(w\times x_{S\setminus\Lambda},\ x),$$

hence from Theorems (1), (2) and (8) we obtain

$$\sum_{w\in X(\Lambda)}\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda})=\lambda(x)\sum_{w\in X(\Lambda)}\frac{\bar{q}(x,\ w\times x_{S\setminus\Lambda})}{\bar{q}(w\times x_{S\setminus\Lambda},\ x)}=\lambda(x)\sum_{w\in X(\Lambda)}\frac{\mu_{\tilde{\Lambda}}(w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda})}{\mu_{\tilde{\Lambda}}(x_{\tilde{\Lambda}})}$$

$$=\lambda(x)\frac{\mu_{\tilde{\Lambda}}(X(\Lambda)\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda})}{\mu_{\tilde{\Lambda}}(x_{\tilde{\Lambda}})}<\infty.$$

(11) **Lemma.** *Let Q be a speed function field, which has a potential and satisfies* (3) *and* (10), *with finite range. For every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$ we put*

$$(12)\quad f^{\Lambda}(x)=\lambda(x)\Big[1-\sum_{w\in X(\Lambda)}\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda})\Big],\ x\in X.$$

Then $\{f^{\Lambda};\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$ has the following properties:

$$(13)\quad \forall x\in X,\ f^{\Lambda}(x)>0;$$

$$(14)\quad \forall\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ \forall y\in X(S\setminus\Lambda),\ \sum_{z\in X(\Lambda)}f^{\Lambda}(z\times y)=1;$$

$$(15)\quad \forall\Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f,\ \forall x\in X,\ f^{\tilde{\Lambda}}(x)=f^{\Lambda}(x)\sum_{w\in X(\Lambda)}f^{\tilde{\Lambda}}(w\times x_{S\setminus\Lambda});$$

$$(16)\quad \forall\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ \exists\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f,\ \tilde{\Lambda}\supset r(\Lambda)\ \textit{such that}\ f^{\Lambda}\ \text{is}\ \mathscr{F}(\tilde{\Lambda})\textit{–measurable.}$$

Proof First, we note that f^{Λ} is independent of the selection of Δ_l and $L(\Delta, x)$(See § 2). In fact, if we choose another Δ_l' and $L'(\Delta_l', x)$, and define $\lambda'(x)$ in the same way, then from potentiality for Q and Theorem (2.10) there is an $\alpha_l>0$ such that $\lambda(x)=\alpha_l\lambda'(x)$ for every $x\in X_l$. So from (3) we obtain

$$\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ \forall w\in X(\Lambda),\ x\sim w\times x_{S\setminus\Lambda},$$

hence $\lambda(x)$ and $\lambda'(x)$ define the same f^{Λ}.

Next, (13) and (14) are trivial. For every $\Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f$ and every $x\in X$, we have

$$f^{\tilde{\Lambda}}(x)=\frac{\lambda(x)}{\sum_{w\in X(\tilde{\Lambda})}\lambda(\tilde{w}\times x_{S\setminus\tilde{\Lambda}})}=\frac{\lambda(x)}{\sum_{w\in X(\Lambda)}\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda})}\cdot\sum_{w\in X(\Lambda)}\frac{\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda})}{\sum_{w\in X(\tilde{\Lambda})}\lambda(\tilde{w}\times x_{S\setminus\tilde{\Lambda}})}$$

$$=f^{\Lambda}(x)\sum_{w\in X(V)}f^{\tilde{\Lambda}}(w\times x_{S\setminus\Lambda}),$$

so (15) holds.

Finally we will prove (16). We use the notation and result in Remark (5) to

prove that f^{Λ} is $\mathscr{F}(\tilde{\Lambda})$-measurable for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, i. e.

(17) $\forall z\in X(S\setminus\tilde{\Lambda})$, $f^{\Lambda}(x)=f^{\Lambda}(x_{\tilde{\Lambda}}\times z)$.

For fixed $x\in X$ there is an $l\in D$ such that $x\in X_l$. Since f^{Λ} is independent of the selection of Δ_l, we can suppose $x=\Delta_l$ without loss of generality, i.e. $\lambda(x)=\lambda(\Delta_l)=1$. Let $x_{\tilde{\Lambda}}\times z\in X_{\nu}$. From path-independence, (7) and (8), we obtain

$$\begin{aligned}\lambda(w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\times z)&=\frac{\hat{q}(\Delta_{\nu},\ w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\times z)}{\hat{q}(w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\times z,\ \Delta_{\nu})}\\&=\frac{\hat{q}(\Delta_{\nu},\ x_{\tilde{\Lambda}}\times z)}{\hat{q}(x_{\tilde{\Lambda}}\times z,\ \Delta_{\nu})}\cdot\frac{\bar{q}(x_{\tilde{\Lambda}}\times z,\ w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\times z)}{\bar{q}(w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\times z,\ x_{\tilde{\Lambda}}\times z)}\\&\overset{(7)}{=}\lambda(x_{\tilde{\Lambda}}\times z)\frac{\bar{q}(x,\ w\times x_{S\setminus\Lambda})}{\bar{q}(w\times x_{S\setminus\Lambda},\ x)}\\&\overset{(8)}{=}\lambda(x_{\tilde{\Lambda}}\times z)\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda}).\end{aligned}$$

hence

$$f^{\Lambda}(x_{\tilde{\Lambda}}\times z)=\frac{\lambda(x_{\tilde{\Lambda}}\times z)}{\sum_{w\in X(\Lambda)}\lambda(w\times x_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}\times z)}=\frac{1}{\sum_{w\in X(\Lambda)}\lambda(w\times x_{S\setminus\Lambda})}=f^{\Lambda}(x),$$

thus the proof is terminated.

(18) **Corollary.** $\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $f^{\Lambda}\in\mathscr{C}(X)$.

Now, we discuss how to construct the quasi-reversible measures for Q.

(19) **Definition.** *The family* $\mathscr{V}=\{f^{\Lambda}:\Lambda\in\mathscr{S}_f\}$ *of the functions satisfying* (13)—(15) *is said to be a specificateon.* $\mu\in\mathscr{P}(X)$ *is called a Gibbs state with specification* $\mathscr{V}$, *if*

(20) $\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $\forall y\in X(\Lambda)$, $\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{F}(S\setminus\Lambda))=f^{\Lambda}(y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})$, μ—a. e.

The set of all Gibbs states with specification $\mathscr{V}$ *is dented by* $\mathscr{G}(\mathscr{V})$.

For every $z\in X(S\setminus\Lambda)$, $F\in\mathscr{F}$, we define

(21) $\mu_{\Lambda,z}(F)\triangleq\sum_{y\in F(z)}f^{\Lambda}(y\times z)$,

where $F(z)\triangleq\{y\in X(\Lambda):y\times z\in F\}$, and let $\mathscr{G}_{\Lambda}(\Lambda\in\mathscr{S}_f)$ be the closed convex hull of all $\mu_{\Lambda,z}$, $z\in X(S\setminus\Lambda)$. Finelly, let

(22) $\mathscr{G}\triangleq\{\mu\in\mathscr{P}(X):\ \exists\Lambda_m\in\mathscr{S}_f,\ \Lambda_m\nearrow S,\ \exists\mu_m\in\mathscr{G}_{\Lambda_m}$ such that $\mu_m\xrightarrow{\omega}\mu\}$

where $\mu_m\xrightarrow{\omega}\mu$ means that μ_m is weakly convergent to μ.

(23) **Proposition.** *Let* Q *be a speed funetion field, which satisfies* (3) *and* (10), *with finite range, then* $\mathscr{V}=\{f^{\Lambda}:\Lambda\in\mathscr{S}_f\}$ *defined by* (12) *is a specification, every* f^{Λ} *is a continuous function on* X *and*

(24) $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}(\mathscr{V})$.

Proof Lemma (11) and Corollary (18) imply the first assertion. It is clear that $\mu\in\mathscr{G}(\mathscr{V})$ is equivalent to the following

(25) $\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $\forall y\in X(\Lambda)$, $\forall F\in\mathscr{F}_0(S\setminus\Lambda)$, $\mu(\{y\}\times F)=\int_F f^{\Lambda}(y\times z)\mu_{S\setminus\Lambda}(dz)$.

hence it remains only to prove that (25) holds for

(26) $F=\{y_1\}\times X(S\setminus\tilde{\Lambda}),\ \tilde{\Lambda}\supset\Lambda,\ \tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f,\ y_1\in X(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda)$.

Let $\mu\in\mathscr{G}$, then there are $\Lambda_m\in\mathscr{S}_f$, $\Lambda_m\uparrow S$ and $\mu_m\in\mathscr{G}_{\Lambda_m}$ such that $\mu_m\xrightarrow{\omega}\mu$. In order to prove that $\mu\in\mathscr{G}(\mathscr{V})$, we first prove that (25) holds for F in (26) and

(27) $\mu=\mu_{\Lambda_m,z_m}\Lambda_m\supset\tilde{\Lambda},\ z_m\in X(S\setminus\Lambda_m)$.

From (21) and (15) we obtain that the right hand side of (25)

$$=\int_{(y_1)\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda}(y\times z)\,(\mu_{\Lambda_m,z_m})_{S\setminus\Lambda}(dz)=\int_{(y_1)\times X(\Lambda_m\setminus\tilde{\Lambda})\times(z_m)} f^{\Lambda}(y\times z)\,(\mu_{\Lambda_m,z_m})_{S\setminus\Lambda}(dz)$$

$$=\sum_{y'\in X(\Lambda_m\setminus\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda}(y\times y_1\times y'\times z_m)\sum_{w\in X(\Lambda)} f^{\Lambda_m}(w\times y_1\times y'\times z_m)$$

$$=\sum_{y'\in X(\Lambda_m\setminus\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda_m}(y\times y_1\times y'\times z_m)=\mu_{\Lambda_m,z_m}(\{y\times y_1\}\times X(S\setminus\tilde{\Lambda})).$$

Furthermore (25) holds for F in (26) and the convex linear combination ν_m of $\mu_{\Lambda_m z_m}$ (Λ_m is fixed). Because $f^{\Lambda}(y\times\cdot)$ is a bounded continuous function on $X(S\setminus\Lambda)$, so (25) holds also for F in (26) and $\mu=\mu_m\in\mathscr{G}_{\Lambda_m}$ ane hence for $\mu\in\mathscr{G}$. Thus we have proved that $\mu\in\mathscr{G}(\mathscr{V})$.

(28) **Proposition.** *Let Q be a speed function field which satisfies* (3) *and* (10), *with finite range. If $\mathscr{G}(\mathscr{V})\neq\phi$, then Q is quasi-reversible and every $\mu\in\mathscr{G}(\mathscr{V})$ is a quasi-reversible measure for Q,*

Proof It suffices to prove that every $\mu\in\mathscr{G}(\mathscr{V})$ is a quasi-reversible measure for Q.

First, we want to prove (3.18). Take $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$, from (16), there is a $\tilde{\Lambda}\supset r(\Lambda)$, $\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f$ such that f^{Λ} is $\mathscr{F}(\tilde{\Lambda})$-measurable. We may assume $\tilde{\Lambda}\neq\Lambda$ without loss of generality. For every $\Lambda_1\supset\tilde{\Lambda}$, applying (25) to $F=\{w\}\times X(S\setminus\Lambda_1)$, $w\in X(\Lambda_1\setminus\Lambda)$, we obtain

(29) $\mu_{\Lambda_1}(y\times w)=f^{\Lambda}(y\times w\times\bar{z})\,\mu_{\Lambda_1\setminus\Lambda}(w)$, $w\in X(\Lambda_1\setminus\Lambda)$, where $\bar{z}$ is an arbitrary but fixed element in $X(S\setminus\Lambda_1)$. Since $\Lambda_1\setminus\Lambda\neq\emptyset$ and $\mu_{\Lambda_1\setminus\Lambda}$ is a probability measure, there is a $\bar{w}\in X(\Lambda_1\setminus\Lambda)$ such that $\mu_{\Lambda_1\setminus\Lambda}(\bar{w})>0$, hence $\mu_{\Lambda_1}(y\times\bar{w})>0$ from (13). Taking the summation for w in (29) over $X(\Lambda_1\setminus\Lambda)$, we obtain $\mu_{\Lambda}(y)>0$.

Next, we want to prove (3.19). $\tilde{\Lambda}$ remains as above. From (29) we have, for every $\Lambda_1\supset\tilde{\Lambda}$, $\Lambda_1\in\mathscr{S}_f$, $x\in X(\Lambda_1)$, $y\in X(\Lambda)$, that

$$\frac{\mu_{\Lambda_1}(x)}{\mu_{\Lambda_1}({}^{y}_{\Lambda}x)}=\frac{f^{\Lambda}(x\times z)}{f^{\Lambda}({}^{y}_{\Lambda}x\times z)}=\frac{\lambda(x\times z)}{\lambda({}^{y}_{\Lambda}x\times z)},\quad z\in X(S\setminus\Lambda_1).$$

Hence, by the potentiality for Q and Theorem (2.10), Q is weakly symmetrizable and $\lambda(\cdot)$ is its symmetrizing function. Therefore, we have

$\forall\Lambda_1\in\mathscr{S}_f$, $\Lambda_1\supset\tilde{\Lambda}$, $\forall x\in X(\Lambda_1)$,

$$\frac{\mu_{\Lambda_1}(x)}{\mu_{\Lambda_1}({}^{y}_{\Lambda}x)}=\frac{c(\Lambda,\,x_{\Lambda},\,{}^{y}_{\Lambda}x)}{c(\Lambda,\,y,\,x)},$$

whenever $c(\Lambda,\,y,\,x)>0$. For every $\Lambda_1\in\mathscr{S}_f$, $\tilde{\Lambda}\supset\Lambda_1\supset r(\Lambda)$, $x\in X(\Lambda_1)$, by the above equality (taking $\Lambda_1=\tilde{\Lambda}$ there), we obtain

$$\frac{\mu_{\Lambda_1}(x)}{\mu_{\Lambda_1}({}^{y}_{\Lambda}x)}=\frac{\sum\limits_{w\in X(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda_1)}\mu_{\tilde{\Lambda}}(x\times w)}{\sum\limits_{w\in X(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda_1)}\mu_{\tilde{\Lambda}}({}^{y}_{\Lambda}x\times w)}=\frac{\sum\limits_{w\in X(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda_1)}c(\Lambda,\ x_\Lambda,\ {}^{y}_{\Lambda}x\times w)}{\sum\limits_{w\in X(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda_1)}c(\Lambda,\ y,\ x\times w)}$$

$$=\frac{c(\Lambda,\ x_\Lambda,\ {}^{y}_{\Lambda}x)}{c(\Lambda,\ y,\ x)},\quad x\in X(\Lambda_1),$$

whenever $c(\Lambda,\ y,\ x)>0$. Hence (3.19) follows from the last two equations. The proof is terminated.

From Propositions (23) and (28) we know how to construct some quasi-reversible measures for Q from a specification $\mathscr{V}$. But we do not know until now whether these are all such measures. We will construct all quasi-reversible measures for Q in another way, and give the necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of quasi-reversible measures.

(30) **Definition.** *Let Q be a speed function field, which satisfies (2), with finite range. For every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, we will call $\partial\Lambda\triangleq\big(\bigcup_{\Lambda\subset\delta(\Lambda),\,|\Delta|=N} r(\Delta)\big)\setminus\Lambda$ the boundary of Λ.*

It is clear that $\tilde{\Lambda}=\Lambda\cup\partial\Lambda$ from Remark (5).

We define $\bar{q}(\cdot,\ \cdot)$ according to Remark (5). We choose an arbitrary but fixed $\theta\in X$, then from (7) we have

$$\forall y\in X(\Lambda),\ y\neq\theta_\Lambda,\ \forall z\in X(\partial\Lambda),\ \forall w\in X(S\setminus(\Lambda\cup\partial\Lambda)),$$
$$\bar{q}(\theta_\Lambda\times z\times w,\ y\times z\times w)=\bar{q}(\theta_\Lambda\times z,\ y\times z),$$
$$\bar{q}(y\times z\times w,\ \theta_\Lambda\times z\times w)=\bar{q}(y\times z,\ \theta_\Lambda\times z).$$

(31) **Proposition.** *Let Q be a speed function field, which has a potential and satisfies (3), with finite range, and let $\Lambda_m\in\mathscr{S}_f$, $\Lambda_m=\Lambda_{m-1}\cup\partial\Lambda_{m-1}$, $\Lambda_m\neq\Lambda_{m-1}$, $m\geqslant 1$, $|\Lambda_0|\geqslant N$ and $\Lambda_m\uparrow S$. If the equations*

$$(32)\quad x_{m,z}=\sum_{w\in X(\partial\Lambda_m)}\frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_m}\times w,\ \theta_{\Lambda_{m-1}}\times z\times w)}{\bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}}\times z\times w,\ \theta_{\Lambda_m}\times w)}\,x_{m+1,w},\quad m\geqslant 1,\ z\in X(\partial\Lambda_{m-1})$$

have a positive solution $\bar{x}_{m,z}(m\geqslant 1,\ z\in X(\partial\Lambda_{m-1}))$ and

$$(33)\quad z_m\triangleq\sum_{\substack{y'\in X(\Lambda_{m-1})\\ z'\in X(\partial\Lambda_{m-1})}}\frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}}\times z',\ y'\times z')}{\bar{q}(y'\times z',\ \theta_{\Lambda_{m-1}}\times z')}\,\bar{x}_{m,z'}<\infty,$$

where $\bar{q}(x,\ \tilde{x})\setminus\bar{q}(x,\ \tilde{x})=1$ when $x=\tilde{x}$ as a convention, and for every $y\in X(\Lambda_{m-1})$, $z\in X(\partial\Lambda_{m-1})$, we define

$$(34)\quad \mu_m(y\times z)\triangleq z_m^{-1}\,\frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}}\times z,\ y\times z)}{q(y\times z,\ \theta_{\Lambda_{m-1}}\times z)}\,\bar{x}_{m,z},$$

then $\{\mu_m\}_{m>1}$ determines a unique quasi-reversible measure for Q, such that each μ_m is the projection of μ on $X(\Lambda_m)$.

Proof Clearly, μ_m defined in (34) is a positive probability measure on $X(\Lambda_m)$. We want to prove that

1° $\{\mu_m\}_{m>1}$ are consistent. From the potentiality for Q and (3) we have

$$\forall y\in X(\Lambda_{m-1}),\ \forall z\in X(\partial\Lambda_{m-1}),\ \forall w\in X(\partial\Lambda_m),$$
$$\bar{q}(\theta_{\Lambda_m}\times w,\ y\times z\times w)=\bar{q}(\theta_{\Lambda_m}\times w,\ \theta_{\Lambda_{m-1}}\times z\times w)\bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}}\times z,\ y\times z),$$

$$\bar{q}(y\times z\times w,\ \theta_{\Lambda_m}\times w)=\bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}}\times z\times w,\ \theta_{\Lambda_m}\times w)\bar{q}(y\times z,\ \theta_{\Lambda_{m-1}}\times z).$$

so form (3) and the fact that $\bar{x}_{m,z}$ satisfies (32), by simple calculation, it is not difficult to obtain

$$Z_{m+1}=Z_m,\ m\geqslant 1.$$

From this equation, (34), (35), and the fact that $\bar{x}_{m,z}$ satisfies (32), we obtain

$$\sum_{w\in X(\partial\Lambda_m)}\mu_{m+1}(y\times z\times w)=Z_{m+1}^{-1}\sum_{w\in X(\partial\Lambda_m)}\frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_m}\times w,\ y\times z\times w)}{\bar{q}(y\times z\times w,\ \theta_{\Lambda_m}\times w)}\bar{x}_{m+1,w}$$
$$=Z_m^{-1}\frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}}\times z,\ y\times z)}{\bar{q}(y\times z,\ \theta_{\Lambda_{m-1}}\times z)}\bar{x}_{m,z}=\mu_m(y\times z).$$

2° Let $\mathscr{A}_0\triangleq\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathscr{F}(\Lambda_m)$, then $\mathscr{A}_0$ is a field and $\sigma(\mathscr{A}_0)=\mathscr{F}$, by Kolmogorov consistency theroem, there is a unique measure on $\mathscr{F}$, denoted by μ, such that μ_m is the projection of μ on $X(\Lambda_m)$.

3° μ is a quasi-reversible measure for Q.

For every $\Lambda\in\mathscr{S}_N$, $\tilde{\Lambda}\supset r(\Lambda)$, since $\Lambda_m\nearrow S$, there is an $m\geqslant 1$ such that $\Lambda_m\supset\Lambda$, $\Lambda_{m+1}\supset\tilde{\Lambda}$. Let $y\in X(\Lambda)$, $x\in X(\Lambda_{m+1})$. Clearly, (3.19) holds when $c(\Lambda,\ y,\ x)=c(\Lambda,\ y,\ x_{\tilde{\Lambda}})=0$. Thus we may assume that $\theta_{\Lambda_m}\times x_{\partial\Lambda_m}\sim x\to{}^{y}_{\Lambda}x$. From (34) and the path-independence, we obtain

$$\frac{\mu_{m+1}(x)}{\mu_{m+1}({}^{y}_{\Lambda}x)}=\frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_m}\times x_{\partial\Lambda_m},\ x)}{\bar{q}(x,\ \theta_{\Lambda_m}\times x_{\partial\Lambda_m})}\Big/\frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_m}\times x_{\partial\Lambda_m},\ y\times x_{\Lambda_{m+1}\setminus\Lambda})}{\bar{q}(y\times\theta_{\Lambda_{m+1}\setminus\Lambda},\ \theta_{\Lambda_m}\times x_{\partial\Lambda_m})}$$
$$=\frac{\bar{q}(y\times x_{\Lambda_{m+1}\setminus\Lambda},\ x)}{\bar{q}(x,\ y\times x_{\Lambda_{m+1}\setminus\Lambda})}=\frac{\bar{q}({}^{y}_{\Lambda}x_{\tilde{\Lambda}},\ x_{\tilde{\Lambda}})}{\bar{q}(x_{\tilde{\Lambda}},\ {}^{y}_{\Lambda}x_{\tilde{\Lambda}})},$$

hence

$$\mu_{m+1}(x)\bar{q}(x_{\tilde{\Lambda}},\ {}^{y}_{\Lambda}x_{\tilde{\Lambda}})=\mu_{m+1}({}^{y}_{\Lambda}x)\bar{q}({}^{y}_{\Lambda}x_{\tilde{\Lambda}},\ x_{\tilde{\Lambda}}).$$

Taking the summation for $x_{\Lambda_{m+1}\setminus\tilde{\Lambda}}$ over $X(\Lambda_{m+1}\setminus\tilde{\Lambda})$, we obtain (3.19). Therefore μ is a quasi-reversible measure for Q.

(36) **Theorem.** *Let Q be a speed function field with finite range, satisfing* (3). *Suppose that there are $\Lambda_m\in\mathscr{S}$, such that $\Lambda_m=\Lambda_{m-1}\cup\partial\Lambda_{m-1}$, $\Lambda_m\neq\Lambda_{m-1}$, $m\geqslant 1$, $|\Lambda_0|\geqslant N$ and $\Lambda_m\nearrow S$. Then*

(i) *Every quasi-reversible measure μ for Q can beobtained in the same manner as in Proposition* (31);

(ii) *If there are two positive solutions $\{x^{(i)}_{m,z}:\ m\geqslant 1,\ z\in X(\partial\Lambda_{m-1})\}$ of* (32) *satisfying* (33), *$i=1,2$ then the two quasi-reversible measures obtained in the preceding manner are the same if and only if there is an $\alpha>0$ such that*

(37) $x^{(1)}_{m,z}=\alpha x^{(2)}_{m,z}$, $m\geqslant 1$, $z\in X(\partial\Lambda_{m-1})$;

(iii) *A necessary and sufficient condition of the existence of a quasi-reversible measure for Q is that there exists a positive solution of* (32) *satisfying* (33); *a necessacy and sufficient condition of the existence of a unique quasi-reversible measure for Q is tha there is a unique linear-independent positive solution of* (32) *satisfying* (33).

Proof

1° Let μ be an arbitrary quasi-reversible measure for Q, $\tilde{\mu}_m (m \geqslant 1)$ be the projection of μ on $X(\Lambda_m)$. Then from (3.19) and (7), we have

$$\tilde{\mu}_{m+1}(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z \times w) = \tilde{\mu}_{m+1}(\theta_{\Lambda_m} \times w) \bar{q}(\theta_{\Lambda_m} \times w,\ \theta_{\Lambda_{m-1}} \times z \times w) / \bar{q}(\theta_{\Lambda_m} \times z \times w,\ \theta_{\Lambda_m} \times w),$$

$$\forall m \geqslant 1,\ \forall z \in X(\partial \Lambda_{m-1}),\ \forall w \in X(\partial \Lambda_m).$$

Taking the summation for w over $X(\partial \Lambda_m)$, we obtain

$$\tilde{\mu}_m(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z) = \sum_{w \in X(\partial \Lambda_m)} \frac{\bar{q}(\theta_{\Lambda_m} \times w,\ \theta_{\Lambda_{m-1}} \times z \times w)}{\bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z \times w,\ \theta_{\Lambda_m} \times w)} \tilde{\mu}_{m+1}(\theta_{\Lambda_m} \times w),$$

hence $\tilde{x}_{m,z} \triangleq \tilde{\mu}_m(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z)$, $m \geqslant 1$, $z \in X(\partial \Lambda_{m-1})$ is a positive solution of equations (32). It is easy to check (33).

Next, from (3), (3.19) and (7), we have

$$\tilde{\mu}_m(y \times z) = \tilde{\mu}_m(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z) \bar{q}(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z,\ y \times z) \backslash \bar{q}(y \times z,\ \theta_{\Lambda_{m-1}} \times z)$$

for every $y \in X(\Lambda_{m-1})$ and $z \in X(\partial \Lambda_{m-1})$. Taking $\tilde{x}_{m,z}$ instead of $\bar{x}_{m,z}$ in (33) and (34), we obtain

$$Z_m = 1,\ \mu_m = \tilde{\mu}_m,$$

so μ is the same as the measure obtained from Proposition (31).

2° Let $\{x^{(i)}_{m,z};\ m \geqslant 1,\ z \in X(\partial \Lambda_{m-1})\}$, $i = 1, 2$ be two positive solutions of (32) satisying (33). We define $Z^{(i)}_m$, $\mu^{(i)}_m$ $i = 1, 2$, $m \geqslant 1$ as in Proposition (31).

If $x^{(i)}_{m,z}$ satisfy (37), then $Z^{(1)}_m = \alpha Z^{(2)}_m$ from (33), hence $\mu^{(1)}_m = \mu^{(2)}_m$ from (34), so they determine the same quasi-reversible measure for Q from Proposition (31). Conversely, if $x^{(i)}_{m,z} (i = 1, 2)$ determine the same quasi-reversible measure μ for Q, then $\mu^{(1)}_m = \mu^{(2)}_m$, $m \geqslant 1$ since $\mu^{(1)}_m$ and $\mu^{(2)}_m$ are the projection of μ on $X(\Lambda_m)$, In particular, from (34), we have

$$(Z^{(1)}_m)^{-1} x^{(1)}_{m,z} = \mu^{(1)}_m(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z) = \mu^{(2)}_m(\theta_{\Lambda_{m-1}} \times z) = (Z^{(2)}_m)^{-1} x^{(2)}_{m,z}$$

for every $z \in X(\partial \Lambda_{m-1})$. Moreover, we know from the proof of Proposition (31) that $Z^{(i)}_m$ are independent of m, so (37) holds.

Now we can conclude that there is an injective mapping between the set of all quasi-reversible measures for Q and the set of all equivalent classes of linear-independent positive solutions of equations (32) satisfying (33). This completes the proof.

References

[1] Ding Wanding and Chen Mufa, Quasi-reversibility for the nearest neighbor speed functions, *Chinese Annals of Mathematics*, **2**: 1 (1981).

[2] Yan Shijian and Li Zhanbing, Probability models and Master equations for non-equilibrium systems. *Acta Physica Sinica*, **29**: 2 (1980).

[3] Chen Mufa, Reversible Markov process in abstract space, *Chinese Annals of Mathematics*, **1**: 3—4 (1980).

[4] Hou Zhenting and Chen Mufa, Markov process and field theory, *Kexue Tongbao (in English)*, **25:10** (1980), see [6; Chapter. 6].

[5] Tang Shouzheng, Reversibilty for spin-flip processes, *Acta Math. Sinica*, **25** (1982), 306—314.

[6] Hou Zhenting, Qian Nin and others, Reversile Markov Processe, Hu Nan, China (1979).

[7] Dobrushin, R. L., Markov processes with a large number of locally interacting components, *Problem of Information Transmission*, **7** (1971).

[8] Glauber, R., The statistics of the stochastic Ising model, *Journal of Mathematical Physics*, **4** (1963).

[9] Georgii, H. O., Canonical Gibbs states, *Lecture notes in Maths.*, Springer-Verlag, **760** (1979).

[10] Liggett. T. M., The stochastic evolutions of infinite systems of interacting particles, *Lecture notes in Maths.*, **598** (1977).

[11] Liggett. T. M., Existence theorem for infinite particle systems, *TAMS*, **165** (1972).

[12] Logan. K. G., Time reversible evolutions in statical mechanics., Cornell University Ph. D. thesis(1974).

[13] Parthasarathy, K. R., Probability measures on metric spaces, New York. Academic Press (1967).

[14] Preston. C., Gibbs states on countable sets, *Cambridge Tracts in Maths.*, London, Cambridge Univ. Press No. 68 (1974).

[15] Spitzer. F., Interacting of Markov processes, *Advances in Maths.*, **5** (1970).

一般速度函数的有势性与可逆性 (I)

严士健　陈木法　　丁万鼎

（北京师范大学）　（安徽师范大学）

摘　要

本文提出了一类一般的无穷质点系统的随机演化模型，它包括已有的大多数模型[7,10,15]为其特例，同时也可以认为是对非平衡系统的多元线性 Master 方程的概率模型[2]的推广与一般化.

§2 首先将场论[4]推广到一般状态空间(定理 (2.10))使之作为讨论问题的一个基本工具,然后讨论以无穷乘积空间为态空间的场的局部化(定理(2.14)). §3 引入有限程速度函数场(定义(3.15))和拟可逆测度(定义 (3.17))作为离散化的条件，并证明了拟可逆是可逆性的外延(定理(3.25)). §4 研究有限程速度函数的有势性与可逆性之间的关系，证明了拟可逆必有势(定理(4.1)). 反之,在速度函数有势且满足(4.3)与 (4.10) 的条件下，证明了关于规范 $\mathscr{V}$ 的 Gibbs 态集 $\mathscr{G}(\mathscr{V})\supset\mathscr{G}$ (命题 (4.23))且 $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ 的每一元都是拟可逆测度(命题 (4.28)), 其中 $\mathscr{G}$ 是由 $\mathscr{V}$ 出发构造的测度的一切弱极限作成的集(定义 (4.19)). 给出了构造一切拟可逆测度的一种办法. 由此得出了拟可逆测度存在及唯一的充要条件(定理(4.36)).

Chin. Ann. of Math.
3 (6) 1982

第六章 一般速度函数的有势性与可逆性(II)

POTENTIALITY AND REVERSIBILITY FOR GENERAL SPEED FUNCTIONS (II). COMPACT STATE SPACES

YAN SHIJING CHEN MUFA DING WANDING
(*Beijing Normal University*) (*Anhui Normal University*)

www.cnki.net

In this part of the paper, we use the methods and results developed in part I[1] to the case of compact state spaces.

In § 5 we show that quasi-reversibility for a speed function satisfying (4.3) in [1] with finite range is equivalent to potentiality, $\tilde{\mathscr{G}}=\mathscr{G}(\mathscr{V})$, and quasi-reversibility implies reversibility under certain conditions. In § 6 we discuss mainly the preceding problems for the exclusion processes, and obtain some ideal results. First we give the simplest criterions for potentiality, then we prove that for the exclusion processes there is always a reversible measure. If the speed functions have a potential, then the reversible measures can be described by the canonical Gibbs states constructed by the speed functions. Conversely, if there exists a positive reversible measure, then it has a potential and the set of all positive reversible measures coincides with the set of all positive canonical Gibbs states. The corresponding results for the spin-flip processes have been obtained in [3]. We also show that these results can be obtained by our methods.

We are glad to thank Liu Xiu-fang for her discussion with us.

§ 5. For Compact State Spaces

In this section, we will suppose that Y_u is finite for every $u\in S$, hence $X=\prod_{u\in S} Y_u$ becomes a compact space. In this case the results of preceding sections can be improved.

(1) **Theorem.** *Let Q be a speed function field, which satisfies* (4.3), *with finite range, then Q is quasi-reversible if and only if Q has a potential.*

Proof The necessity follows from Theorem (4.1) in [1]. We want to prove the sufficiency.

Since Y_u is finite for every $u\in S$, (4.10) in [1] holds. hence $\tilde{\mathscr{G}}\subset\mathscr{G}(\mathscr{V})$ from Proposition (4.23) in [1]. Taking $\Lambda_n\in\mathscr{S}_f$, $n\geqslant 1$, $\Lambda_n\uparrow S$ and $z_n\in X(S\backslash\Lambda_n)$, we have

Manuscipt recived Apr. 4, 1981.

$\mu_{\Lambda_n,z_n}\in\mathscr{P}(X)$ from (4.14) and (4.21) in [1]. Because X is a compact space, from [6] there is a subsequence of $\{\mu_{\Lambda_n,z_n}\}_{n\geq 1}$ converging to μ in weak topology, so we have $\mu\in\widetilde{\mathscr{G}}$ from (4.22) in [1]. Thus $\mathscr{G}(\mathscr{V})\neq\varnothing$ and from Proposition (4.28) in [1] this implies that Q is quasi-reversible.

The following theorem may be regarded as the construction definition for Gibbs states.

(2) **Theorem.** *Let Q be a speed function field, which has a potential and satisfies* (4.3) *with finite range, then we have*

$$\widetilde{\mathscr{G}}=\mathscr{G}(\mathscr{V}). \tag{3}$$

Proof Proposition (4.23) in [1] and the fact that Y_u is finite imply (4.24) in [1]. Conversely, if $\mu\in\mathscr{G}(\mathscr{V})$, then from (4.20) in [1] for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$ we have

$$\forall y\in X(\Lambda),\ \mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda))=\int_{X(S\setminus\Lambda)} f^{\Lambda}(y\times z)\mu_{S\setminus\Lambda}(dz). \tag{4}$$

For each $n\geq 1$, we put

$$I_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}^{X(\Lambda)},$$

$$A_{ni}\triangleq\prod_{w\in X(\Lambda)}A^w_{n,i(w)}, \tag{5}$$

where $i=\{i(w):\ w\in X(\Lambda)\}$, $A^w_{n,i(w)}\triangleq\left\{z\in X(S\setminus\Lambda):\ \frac{i(w)-1}{n}\leqslant f^{\Lambda}(w\times z)<\frac{i(w)}{n}\right\}$ if $1\leqslant i(w)\leqslant n-1$, and $A^w_{n,n}\triangleq\left\{z\in X(S\setminus\Lambda):\ \frac{n-1}{n}\leqslant f^{\Lambda}(w\times z)\leqslant 1\right\}$. We choose an arbitrary but fixed $z_{ni}\in A_{ni}$, $i\in I_n$. From (4), (5) and (4.21) in [1] we have

$$\forall y\in X(\Lambda),\ \mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda))=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I_n}\mu_{S\setminus\Lambda}(A_{ni}). \tag{6}$$

$\mu_{\Lambda,z_i}(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda))$. Put $\mu_{\Lambda,n}\triangleq\sum_{i\in I_n}\mu_{S\setminus\Lambda}(A_{ni})\mu_{\Lambda,z_{ni}}\in\widetilde{\mathscr{G}}_{\Lambda}$. Since X is a compact space, from [9] we know that there exist $\mu^{\Lambda}\in\widetilde{\mathscr{G}}$ and $\{n_k\}$ such that $\mu_{\Lambda,n_k}\xrightarrow{w}\mu^{\Lambda}$. So for every $y\in X(\Lambda)$ we have $\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda))=\mu^{\Lambda}(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda))$ from (6), hence

$$\mu(A\times X(S\setminus\Lambda))=\mu^{\Lambda}(A\times X(S\setminus\Lambda)),\ \forall A\subset X(\Lambda). \tag{7}$$

Therefore, for every $\Lambda_n\in\mathscr{S}_2$, $\Lambda_n\uparrow S$, we have $\mu^{\Lambda_n}\in\widetilde{\mathscr{G}}_{\Lambda_n}$, and for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$, we have

$$\lim_{n\to\infty}\mu^{\Lambda_n}(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda))=\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda))$$

from (7). This fact implies that $\mu^{\Lambda_n}\xrightarrow{w}\mu$, hence $\mu\in\widetilde{\mathscr{G}}$ The proof is completed.

What can we say more for $N=1$? First we have

(8) **Theorem.** *Let Q be a potential field which satisfies* (4.3) in [1] *and is defined by a speed function $c(u,\ y,\ x)$ $(u\in S,\ y\in Y_u,\ x\in X)$. and*

$$\forall u\in S,\ \forall y\in Y_u,\ c(u,\ y,\ \cdot)\in\mathscr{C}(X). \tag{9}$$

Then $\mathscr{V}=\{f^{\Lambda}:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f\}$ defined by (4.12) in [1] *is a specification, and both* (4.18) *and* (3) *hold.*

Proof The first assertion follows from the proof of Lemma (4.11). Now we want to prove (4.18): $\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $f^{\Lambda}\in\mathscr{C}(X)$.

Let $x^{(m)} \longrightarrow x (m \to \infty)$, then there is an m_0 such that $(x^{(m)})_u = x_u$ for every $m \geqslant m_0$ and $u \in \Lambda$. So $f^\Lambda(x^{(m)}) = f^\Lambda(x_\Lambda \times (x^{(m)})_{S\setminus\Lambda})$, and it suffices to prove that

$$\forall \tilde{w} \in X(\Lambda),\ f^\Lambda(\tilde{w} \times \cdot) \in \mathscr{C}(X(S\setminus\Lambda)). \tag{10}$$

Fix $\theta \in X$, $w \in X(\Lambda)$. From (4.3) in [1], $N=1$, $\delta(\Lambda)=\Lambda$ and Remark (4.5) in [1] we can choose n, $w_i \in X(\Lambda)$, $i=1, 2, \cdots, n$ such that

$$w_0 \times z \triangleq \theta_\Lambda \times z \to w_1 \times z \to \cdots \to w_n \times z \to w_{n+1} \times z \triangleq w \times z$$

for every $z \in X(S\setminus\Lambda)$. From (9) we know that

$$\bar{q}(\theta_\Lambda \times z,\ w \times z) \triangleq \prod_{i=0}^{n} q(w_i \times z,\ w_{i+1} \times z) \text{ and } \bar{q}(w \times z,\ \theta_\Lambda \times z) \triangleq \prod_{i=0}^{n} q(w_{i+1} \times z,\ w_i \times z)$$

are continuous functions, so from (4.8) in [1] we obtain

$$f^\Lambda(\tilde{w} \times z) = \frac{\lambda(\tilde{w} \times z)}{\sum_{w \in X(\Lambda)} \lambda(w \times z)} = \frac{\bar{q}(\theta_\Lambda \times z,\ \tilde{w} \times z)}{\bar{q}(\tilde{w} \times z,\ \theta_\Lambda \times z)} \Big/ \sum_{w \in X(\Lambda)} \frac{\bar{q}(\theta_\Lambda \times z,\ w \times z)}{\bar{q}(w \times z,\ \theta_\Lambda \times z)},$$

hence $f^\Lambda(\tilde{w} \times z)$ is a continuous function in z, and (10) holds.

Finally, we can prove (3) in the same way as the proof of Theorem (2).

(11) **Remark.**

(i) In fact, Lemma (4.11) in [1], Corollary (4.18) in [1] and Proposition (4.23) in [1] except (4.16) in [1] remain valid for countable $Y_u (\forall u \in S)$ and $N=1$, if we use Condition (9) instead of the hypothesis of "finite range" in Lemma (4.11) in [1] and Proposition (4.23) in [1]. The proofs are just the same as that of Theorem (8).

(ii) In § 6 we will discuss the case of $N=1$ and $Y_u = \{0, 1\}$ $(u \in S)$, which concludes the spin-flip processes.

When will a quasi-reversible measure be a reversible measure? An answer is obtained for $N=1$.

(12) **Lemma.** *Let $N=1$, the speed function $c(u, y, \cdot) \in \mathscr{C}(X)$ is uniformly bounded for u and y. we define a linear operator Ω on $\mathscr{C}(X)$ as follows:*

$$\begin{cases} \Omega f \triangleq \sum_{u \in S} \sum_{y \in Y_u} c(u, y, \cdot) \Delta_u^y f,\ f \in \mathscr{D}(\Omega), \\ \mathscr{D}(\Omega) \triangleq \{f \in \mathscr{C}(X) : \sum_{u \in S} \sum_{y \in Y_u} \| \Delta_u^y f \| < \infty\}. \end{cases} \tag{13}$$

Suppose that the closure $\bar{\Omega}$ of Ω generates a unique Markov semigroup, then $\mathscr{A}$ is a core for $\bar{\Omega}$.

Proof It suffices to prove that for every $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, there is a $g \in \mathscr{A}$ such that $\|g-f\| < \varepsilon$ and $\|\Omega g - \Omega f\| < \varepsilon$. We write $M \triangleq \sup\{c(u, y, x) : u \in S, y \in Y_u, x \in X\}$, choose a $T \in \mathscr{S}_f$ such that

$$\sum_{u \notin T} \sum_{y \in Y_u} \| \Delta_u^y f \| < \left(\frac{\varepsilon}{4M} \wedge \frac{\varepsilon}{4} \right),$$

and choose a $T_1 \in \mathscr{S}_f$ such that $x_{T_1} = x'_{T_1} \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \left(\frac{\varepsilon}{4MK} \wedge \frac{\varepsilon}{4} \right)$, where $k = \sum_{u \in T} |Y_u|$. Putting $g(x) \triangleq f(x_{T_1} \times \theta)$, where $\theta \in X(S\setminus T_1)$ arbitrarily, we have $\|g-f\| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{4MK} \wedge \frac{\varepsilon}{4} \right)$, and for every $x \in X$

$$|\Omega g(x)-\Omega f(x)|\leqslant\sum_{u\in T}\sum_{y\in Y_u}|c(u,\ y,\ x)(\Delta_u^y g(x)-\Delta_u^y f(x)|$$
$$+\sum_{u\notin T}\sum_{y\in Y_u}|c(u,\ y,\ x)(\Delta_u^y g(x)-\Delta_u^y f(x))|$$
$$\leqslant 2M\sum_{u\in T}\sum_{y\in Y_u}\|g-f\|+M\sum_{u\notin T}\sum_{y\in Y_u}[\|\Delta_u^y g\|+\|\Delta_u^y f\|]$$
$$\leqslant 2MK\|g-f\|+2M\sum_{u\notin T}\sum_{y\in Y_u}\|\Delta_u^y f\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(14) **Theorem.** *Let $c(u,\ y,\ \cdot)\in\mathscr{C}(X)$ $(u\in S,\ y\in Y_u)$ be a speed function with finite range which is uniformly bounded for u and y. Suppose that there are $\Lambda_m\in\mathscr{S}_f$, $\Lambda_m\uparrow S$ such that $\Lambda_m=\Lambda_{m-1}\cup\partial\Lambda_{m-1}$, $m\geqslant 1$, and the closure $\bar{\Omega}$ of Ω defined by*
(13) *generates a Markov semigroup on $\mathscr{C}(X)$. Then $\bar{\Omega}$ is quasireversible if and only if it is reversible. In detail, μ is reversible for $\bar{\Omega}$ if and only if it is a quasi-reversible measure for $\bar{\Omega}$.*

Proof From Theorem (3.25) in [1] we know that reversibility implies quasereversibility. Conversely, let μ be a quasi-reversible measure for $\bar{\Omega}$, from Lemma (12), it suffices to show that

$$\forall f,\ g\in\mathscr{A},\ \int f\Omega g\,d\mu=\int g\Omega f\,d\mu,$$

and this is equivalent to

$$\forall A,\ B\in\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}_f}\mathscr{F}(\Lambda),\ \int I_A\Omega I_B d\mu=\int I_B\Omega I_A\,d\mu. \tag{15}$$

To prove this we first consider that

$$A=\{z_1\}\times X(S\setminus\Lambda_{m-1}),\ B=\{z_2\}\times X(S\setminus\Lambda_{m-1}),\ z_1,\ z_2\in X(\Lambda_{m-1}). \tag{16}$$

The equality in (15) is trivial when $z_1=z_2$. Moreover

$$\int I_A\Omega I_B d\mu=\sum_{u\in\Lambda_{m-1}}\int\sum_{y\in Y_u}c(u,\ y,\ x)[I_A(x)I_B({}^y_u x)-I_{AB}(x)]\mu(dx), \tag{17}$$

$$\int I_B\Omega I_A d\mu=\sum_{u\in\Lambda_{m-1}}\int\sum_{y\in Y_u}c(u,\ y,\ x)[I_B(x)I_A({}^y_u x)-I_{AB}(x)]\mu(dx). \tag{18}$$

If there are $u_1,\ u_2\in\Lambda_{m-1}$, $u_1\neq u_2$ such that $(z_1)_{u_i}\neq(z_2)_{u_i}$, then for every $u\in\Lambda_{m-1}$, $x\in X$, we have

$$I_A(x)I_B({}^y_u x)-I_{AB}(x)=I_B(x)I_A({}^y_u x)-I_{AB}(x)=0.$$

Hence from (17) and (18) the equality in (15) holds for A and B in (16) in this case. If there is only a $u_0\in\Lambda_{m-1}$ such that $(z_1)_{u_0}\neq(z_2)_{u_0}$, and $z_1=(z_1)_{u_0}\times(z_2)_{\Lambda_{m-1}\setminus u_0}$, then from (17) and (18) (write $\mu_{\Lambda_m}=\mu_m$) we obtain

$$\int I_A\Omega I_B d\mu=\int_A c(u_0,\ (z_2)_{u_0},\ x)\mu(dx)=\sum_{w\in X(\partial\Lambda_{m-1})}c(\mu_0,\ (z_2)_{u_0},\ z_1\times w)\mu_m(z_1\times w),$$

$$\int I_B\Omega I_A d\mu=\sum_{w\in X(\partial\Lambda_{m-1})}c(u_0,\ (z_1)_{u_0},\ z_2\times w)\mu_m(z_2\times w).$$

Since μ is a quasi-reversible measure for $\bar{\Omega}$, for every $w\in X(\partial\Lambda_{m-1})$, we have

$$\mu_m(z_1\times w)c(u_0,\ (z_2)_{u_0},\ z_1\times w)=\mu_m(z_2\times w)c(u_0,\ (z_1)_{u_0},\ z_2\times w),$$

thus the equality in (15) holds too. Furthermore, the equality in (15) holds for any A and B in (16).

In the general case, it suffices to consider

$$A=\{z_1\}\times X(S\setminus T_1),\ B=\{z_2\}\times X(S\setminus T_2),\ T_i\in\mathscr{S}_f,\ z_i\in X(T_i).$$

Take $\Lambda_m\supset T_1\cup T_2$. Since both A and B are finite disjoint unions of the sets taking the form of $\{z\}\times X(S\setminus\Lambda_m)$, and the equality in (15) is closed under linear combination, the equality in (15) holds for these A and B. Therefore (15) is proved.

When does $\bar{\Omega}$ in Lemma (12) and Theorem (14) generate a Markov semigroup? We have a simple result as follows.

(19) **Theorem.** *Suppose that for every $\Lambda\in\mathscr{S}_N$, $y\in X(\Lambda)$, the speed function $c(\Lambda, y, \cdot)\in\mathscr{C}(X)$. If there is $c(\Lambda, y)$, $\Lambda\in\mathscr{S}_N$, $y\in X(\Lambda)$ such that*

(20) $$\forall\Lambda\in\mathscr{S}_N,\ \forall y\in X(\Lambda),\ c(\Lambda, y, \cdot)\leqslant c(\Lambda, y);$$

(21) $$\sup_u \sum_{u\in\Lambda\in\mathscr{S}_N}\sum_{y\in X(\Lambda)} c(\Lambda, y)=L<\infty;$$

(22) *$\exists M>0$ such that*

$$\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}_N}\sum_{y'\in X(\Lambda')} c(\Lambda', y')\|\Delta^{y'}_{\Lambda'}c(\Lambda, y, \cdot)\|\leqslant Mc(\Lambda, y),$$

then by defining a linear operator Ω on $\mathscr{C}(X)$ as follows:

(23) $$\begin{cases}\Omega f=\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}_N}\sum_{y\in X(\Lambda)} c(\Lambda, y, \cdot)\Delta^y_\Lambda f,\\ \mathscr{D}(\Omega)=\{f\in\mathscr{C}(X):\ \sum_{\Lambda\in\mathscr{S}_N}\sum_{y\in X(\Lambda)} c(\Lambda, y)\|\Delta^y_\Lambda f\|<\infty\},\end{cases}$$

the closure $\bar{\Omega}$ of Ω generates a unique Markov semigroup on $\mathscr{C}(X)$.

Proof An outline of the proof is: taking an arbitrary subset $\mathscr{S}^0_N$ of $\mathscr{S}_N$, and putting

$$\Omega_0 f=\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}^0_N}\sum_{y\in X(\Lambda)} c(\Lambda, y, \cdot)\Delta^y_\Lambda f,$$

we can prove that $\|f\|\leqslant\|f-\lambda\Omega_0 f\|$ for every $\lambda>0$.

Then by using the notations in [7], and setting

$$U(\Lambda, y)f\triangleq\Delta^y_\Lambda f,$$
$$M(\Lambda, y)f\triangleq c(\Lambda, y, \cdot)f(\cdot),$$

it is very easy to prove that

$$\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}_N}\sum_{y'\in X(\Lambda')} c(\Lambda', y')r(U(\Lambda', y'), U(\Lambda, y))\leqslant 2NL,$$
$$\sum_{\Lambda'\in\mathscr{S}_N}\sum_{y'\in X(\Lambda')} c(\Lambda', y')\|[U(\Lambda', y'), M(\Lambda, y)]\|\leqslant Mc(\Lambda, y)$$

for every $\Lambda\in\mathscr{S}_N$ and $y\in X(\Lambda)$. Clearly, $\mathscr{D}(\Omega)\supset\mathscr{A}$, so Ω has a dense domain. Moreover, we have

(24) $$\forall f\in\mathscr{D}(\bar{\Omega}),\ \forall\lambda>0,\ f-\lambda\Omega f\geqslant 0\Rightarrow f\geqslant 0$$

and $\bar{\Omega}\mathbf{1}=0$, hence [7] is applicable.

(25) **Remark** condition (22) in Theorem (19) can be replaced by the following condition

(26) $\forall\Lambda\in\mathscr{S}_N, \forall y\in X(\Lambda)$,

$$\Big[\frac{c}{2NL}\sum_{\substack{\Lambda'\in\mathscr{S}_N\\ \Lambda'\cap\Lambda=\phi}}\sum_{y'\in X(\Lambda')}\|\Delta^{y'}_{\Lambda'}c(\Lambda, y, \cdot)\|+\sup_{\Lambda'\in\mathscr{S}_N, y'\in X(\Lambda'), \Lambda_i\cap\Lambda\neq\phi}\|\Delta^{y'}_{\Lambda'}c(\Lambda, y, \cdot)\|\Big]\leqslant c(\Lambda, y),$$

where $c \triangleq \sup_{\Lambda \in \mathcal{S}_N, y \in X(\Lambda)} c(\Lambda, y)$.

§ 6. Potentiality and Reversibility for Exclusion Processes

The spin-flip processes and the exclusion processes[6] are two kinds of Markov processes with infinite particle systems. Many of the results in the preceding sections are appli-cable to these processes, but the exclusion processes don't satisfy condition (4.3) in [1], so there are some difterences. Since there were discussions for spin-flip processes in [3]. we will emphatically discuss the exclusion processes in this section.

We take $Y_u \equiv \{0, 1\}$, $\forall u \in S$, and let $c(\cdot, \cdot, \cdot)$: $S \times S \times X \to R$ be non-negative and satisfy

(1) $c(u, v, x) > 0$ if and only if $x_u \neq x_v$ for $u, v \in S$, $u \neq v$;

(2) $c(u, v, \cdot) = c(v, u, \cdot) \in \mathscr{C}(X)$, $u, v \in S$.

If we put

$$c(\{u, v\}, y, x) \triangleq \begin{cases} c(u, v, x), & x_u \neq x_v, \ (y_u, y_v) = (x_v, x_u), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

then $c(u, v, x)$is a particular form of $c(\Lambda, y, x)$for$|\Lambda| = 2$, but it does not satisfy (4.3)in[1]. Then, Ω defined in § 3 reduces to

(3) $\Omega f(x) = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in S} c(u, v, x) \Delta_{(u,v)} f(x)$,

where

$$\Delta_{(u,v)} f(x) = f((_{u,v})x) - f(x),$$

$$(_{(u,v)}x) = \begin{cases} x_v, & w = u, \\ x_u, & w = v, \\ x_w, & w \neq u, v. \end{cases}$$

In order to generate a unique Markov semigroup for the closure of Ω defined as above, we need some conditions(for example, see Theorem (5.19)). If there are $c(u, v) = c(v, u)$and M such that

(4) $\forall x \in X$, $\forall u, v \in S$, $c(u, v, x) \leqslant c(u, v)$;

(5) $\sup_u \sum_v c(u, v) < \infty$;

(6) $\forall u, v \in S$, $\sum_w \| \Delta_w c(u, v, \cdot) \| \leqslant M c(u, v)$;

then by writing

(7) $\mathscr{D}(\Omega) \triangleq \{f \in \mathscr{C}(X): \sum_{u,v} c(u, v) \| \Delta_{(u,v)} f \| < \infty\}$,

we attain that the closure of Ω defined by (3) and (7) generates a unique Markov semigroup, the corresponding process being called an exclusion process.

Again we let $X = \{0, 1\}^S$, $c(\cdot, \cdot)$: $S \times X \to R$ be non-negative and satisfy

(8) $\forall u \in S$, $\forall x \in X$, $c(u, x) > 0$,

(9) $\forall u \in S,\ c(u,\ \cdot) \in \mathscr{C}(X)$,

then

$$c(\{u\},\ y,\ x) = \begin{cases} 0, & y = x_u, \\ c(u,\ x), & y = 1 - x_u, \end{cases} \quad u \in S,\ y \in Y_u,\ x \in X$$

defines a speed function as in [1; § 3] for $N = 1$ and $Y_u = \{0,\ 1\}$. So Ω defined in [1; § 3] determines a unique Markov semigroup under appropriate conditions (for example, see Theorem (5.19)), the corresponding process being called a spinflip process.

Clearly, both $c(u,\ v,\ x)$ and $c(u,\ x)$ satisfy the co-zero condition; so we can define their respective speed function fields as in [1; § 3], i. e.,

(10) $q(x, \tilde{x}) = \begin{cases} c(u,\ v,\ x), & \text{if } \tilde{x} = {}_{(u,v)}x,\ x_u \neq x_v, \\ 0, & \text{other cases of } \tilde{x} \neq x; \end{cases}$

(11) $q(x, \tilde{x}) \triangleq \begin{cases} c(u,\ x), & \tilde{x} = {}_u x, \\ 0, & \text{other cases of } \tilde{x} \neq x, \end{cases}$

where $({}_u x)_w = \begin{cases} x_w, & \text{if } w \neq u \\ 1 - x_w, & \text{if } w = u \end{cases}$. In both cases,

we need not define $q(x,\ x)$ in the following discussions.

We will give the criteria for potentiality of the fields.

(12) **Theorem.** *Let $c(u,\ x)$ be a speed function satisfying* (8). *Then its field Q has a potential if and only if*

(13) $$c(u,\ x)c(v,\ {}_u x)c(u,\ {}_{uv}x)c(v,\ {}_v x) = c(v,\ x)c(u,\ {}_v x)c(v,\ {}_{uv}x)c(u,\ {}_u x),\ \forall u,\ v \in S,\ \forall x \in X,$$

where ${}_{uv}x = {}_{vu}x = {}_u({}_v x)$.

Proof For the convenience of proving the theorem, we introduce several notations.

Define a transformation $\zeta(u)\colon X \to X$ as follows:

$$x\zeta(u) = {}_u x,\ x \in X,\ u \in S,$$

then for every path $L = (x = x^{(0)},\ x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(n)})$, we have

$$x^{(k)} = x\zeta(u_1)\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_k) = {}_{u_k \cdots u_2 u_1}x,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

In the proof we also use $x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n)$ to denote path L, where x denotes the start and $\zeta(u_i)$ denotes the segment $x^{(i-1)} \to x^{(i)}$. By definition (2.4) in [1] we have

(14) $\varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n)) = \varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_k)) + \varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1})\cdots\zeta(u_n)),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$

Using these notations, we can rewrite (13) as

(15) $\forall x \in X,\ \forall u,\ v \in S,\ u \neq v,\ \varphi(x\zeta(u)\zeta(v)) = \varphi(x\zeta(v)\zeta(u))$. Clearly,

(16) $\forall x \in X,\ \forall u \in S,\ \varphi(u\zeta(u)\zeta(u)) = 0.$

Now we want to prove

(17) $\varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n)) = 0$

for every closed path (i. e., $x^{(n)} = x$ for the above L).

Since every closed path consists of an even number of segments, $n = 2m$, m being a

positive integer. We use induction on m. When $m=1$, then $u_1=u_2$, hence (17) follows from (16). Suppose that (17) holds for $n=2(m-1)$. Then, when $n=2m$, there is a k such that $2\leqslant k\leqslant n$, $u_k=u_1$ and $u_l\neq u_1$ for $2\leqslant l\leqslant k-1$. Applying (14) and (15), we obtain

$$\begin{aligned}\varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n)) &= \varphi(x\zeta(u_1)\zeta(u_2))+\varphi((_{u_1u_2}x)\zeta(u_3)\cdots\zeta(u_n))\\ &= \varphi(x\zeta(u_2)\zeta(u_1))+\varphi((_{u_2u_1}x)\zeta(u_3)\cdots\zeta(u_n))\\ &= \varphi(x\zeta(u_2))+\varphi((_{u_2}x)\zeta(u_1)\zeta(u_3)\cdots\zeta(u_n)).\end{aligned}$$

Similarly, applying repeatedly (14) and (15), and applying (16) and $u_k=u_1$, we obtain

$$\begin{aligned}\varphi(x\zeta(u_1)\cdots\zeta(u_n)) &= \varphi(x\zeta(u_2))+\varphi((_{u_2}x)\zeta(u_3))+\varphi((_{u_2u_1}x)\zeta(u_1)\zeta(u_4)\cdots\zeta(u_n))\\ &= \varphi(x\zeta(u_2)\zeta(u_3))+\varphi((_{u_2u_3}x)\zeta(u_1)\zeta(u_4)\cdots\zeta(u_n))=\cdots\\ &= \varphi(x\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_{k-1}))+\varphi((_{u_{k-1}\cdots u_2}x)\zeta(u_1)\zeta(u_k)\cdots\zeta(u_n))\\ &= \varphi(x\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_{k-1}))+\varphi((_{u_{k-1}\cdots u_2}x)\zeta(u_1)\zeta(u_k))\\ &\quad+\varphi((_{u_ku_1u_{k-1}\cdots u_2}x)\zeta(u_{k+1})\cdots\zeta(u_n))\\ &= \varphi(x\zeta(u_2)\cdots\zeta(u_{k-1})\zeta(u_{k+1})\cdots\zeta(u_n))=0.\end{aligned}$$

So (17) holds for every closed path, and the condition is sufficient.

Clearly, the condition is also necessary.

(18) **Theorem.** *Let $c(u, v, x)$ be a speed function satisfying* (1), *then its field Q has a potential if and only if*

$$\begin{aligned}(19)\qquad & c(u, v, x)c(v, w, {}_{(u,v)}x)c(w, u, {}_{(w,u)}x)\\ &= c(u, w, x)c(w, v, {}_{(u,w)}x)c(v, u, {}_{(v,u)}x),\ x\in X,\ \forall u, v, w\in S.\end{aligned}$$

Proof 1°. As the preceding proof, we define $x\,\zeta(u, v)={}_{(u,v)}x$ for $u\neq v$, $x_u\neq x_v$. But where $\zeta(u, v)$ is not a transformation on X because it is only defined on $\{x\in X: x_u\neq x_v\}$. We also use $x\zeta(u_1, v_1)\cdots\zeta(u_n, v_n)$ to denote the path $L=(x\triangleq x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$, which consists of $x=x^{(0)}$ and $x^{(k)}=x^{(k-1)}\,\zeta(u_k, v_k)$, $k=1, \cdots, n$, and we regard $\zeta(u_k, v_k)$ as the k'th segment of the path. By using these notations, it is very easy to prove that (19) is equivalent to

$$\begin{aligned}(20)\qquad & \varphi(x\zeta(u, v)\zeta(v, w))=\varphi(x\zeta(u, w))\ \forall u, v, w\in S,\\ & u, v, w \text{ are pairwise different, } \forall x\in X,\ x_u\neq x_v=x_w.\end{aligned}$$

Moreover, clearly we have $\zeta(u, v)=\zeta(v, u)$, $u\neq v$ and

$$(21)\qquad \forall u, v\in S,\ u\neq v,\ \forall x\in X,\ x_u\neq x_v,\ \varphi(x\zeta(u, v)\zeta(u, v))=0,$$

$$\begin{aligned}(22)\qquad & \varphi(x\zeta(u_1, v_1)\cdots\zeta(u_n, v_n))\\ &= \varphi(x\zeta(u_1, v_1)\cdots\zeta(u_k, v_k))+\varphi(x^{(k)}\zeta(u_{k+1}, v_{k+1})\cdots\zeta(u_n, v_n)).\end{aligned}$$

2°. Under the conditions in (20), we have $x\zeta(u, v)\zeta(v, w)=x\zeta(u, w)$, so clearly (19) is necessary. We will prove its sufficiency. For this, we first prove

$$(23)\qquad \varphi(x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2))=\varphi(x\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_1)),$$

where u_1, v_1, u_2, v_2 are pairwise different and $x_{u_i}\neq x_{v_i}$, $i=1, 2$. We may and do assume that $x_{u_1}=x_{u_2}\neq x_{v_1}=x_{v_2}$. So $x\zeta(u_1, v_2)$ is well-defined. Note that

$$x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)=x,$$

$$x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_1) = {}_{(u_2, v_2)}x,$$

and from (21), (22), (20) we have

$$\begin{aligned}
&\varphi(x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)) \\
&\quad = \varphi(x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_1)) + \varphi(({}_{(u_2, v_2)}x)\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_2)) \\
&\qquad + \varphi(({}_{(u_1, v_2)}x)\zeta(u_1, v_2)) \\
&\quad = \varphi(x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_1)) + \varphi(({}_{(u_2, v_2)}x)\zeta(u_2, u_1)) + \varphi(({}_{(u_1, v_2)}x)\zeta(u_1, v_2)) \\
&\quad = \varphi(x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, u_1)) + \varphi(({}_{(u_1, v_2)}x)\zeta(u_1, v_2)).
\end{aligned}$$

In fact, the last three steps reduce $\zeta(u_2, v_2)\zeta(u_1, v_2)$ to $\zeta(u_2, u_1)$ in terms of (20). Similarly, the right-hand side above reduces to zero, hence (23) is proved.

3°. We now prove that condition (20) is sufficient, i. e., for every closed path $L = (x^{(0)}, \cdots, x^{(n-1)}, x^{(0)}) = x\zeta(u_1, v_1)\cdots\zeta(u_n, v_n)$, we have

$$\varphi(x\zeta(u_1, v_1)\cdots\zeta(u_n, v_n)) = 0. \tag{24}$$

We use induction for n. When $n=2$, (24) reduces to (21), and when $n=3$, from (22), (24) reduces to (21) too. Suppose that (24) holds for $n<m$, now we want to prove that (24) holds for $n=m$.

Since L is a closed path, each u_k and $v_k (1\leqslant k\leqslant m)$ appear an even number of times, and there is a k such that $2\leqslant k\leqslant m$ and

$$\{u_1, v_1\} \cap \{u_k, v_k\} \neq \varnothing, \quad \{u_1, v_1\} \cap \{u_l, v_l\} = \varnothing, \quad 2\leqslant l\leqslant k. \tag{25}$$

Since $\zeta(u, v) = \zeta(v, u)$, we can assume that

$$u_1 = u_k \tag{26}$$

without loss of generality. At the moment we write $\tilde{x} \triangleq x\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_2, v_2)$, then applying (22) and (23) again and again, we obtain

$$\begin{aligned}
&\varphi(x\zeta(u_1, v_1)\cdots\zeta(u_m, v_m) \\
&\quad = \varphi(x\zeta(u_2, v_2)\cdots\zeta(u_{k-1}, v_{k-1})\zeta(u_1, v_1)\zeta(u_k, v_k)\cdots\zeta(u_m, v_m)).
\end{aligned} \tag{27}$$

If $v_1 = v_k$, then from (26) and (21), we obtain (at the moment we write $\hat{x} = x\zeta(u_2, v_2)\cdots\zeta(u_{k-1}, v_{k-1})$) that the right-hand side of (27)

$$= \varphi(x\zeta(u_2, v_2)\cdots\zeta(u_{k-1}, v_{k-1})\zeta(u_{k+1}, v_{k+1})\cdots\zeta(u_m, v_m)),$$

so (24) holds for $n=m$ from the hypothesis for $n=m-2$. If $v_1 \neq v_k$, then from (26) and (20) we obtain that the right-hand side of (27)

$$= \varphi(x\zeta(u_2, v_2)\cdots\zeta(u_{k-1}, v_{k-1})\zeta(v_1, v_k)\zeta(u_{k+1}, v_{k+1})\cdots\zeta(u_m, v_m)),$$

so (24) holds also for $n=m$ from the hypothesis for $n=m-1$. Hence (24) holds for any n and the proof is completed.

We have an analogue of Theorem (5.8) for the spin-flip processes. Now we consider the similar case for the exclusion processes. By the equivalent relation (2.6) in [1], and from (1), the field determined by $c(u, v, x)$ divides X into the equivalent classes $\{X_l; l\in D\}$ as follows:

$$X_l = \{x\in X;\ \Lambda \triangleq \{u\in S;\ x_u \neq (\Delta_l)_u\} \in \mathscr{S}_f,\ \sum_{u\in\Lambda} x_u = \sum_{u\in\Lambda} (\Delta_l)_u\}, \tag{28}$$

where Δ_l is an arbitrary but fixed element of X_l. Letting

$$X_k(\Lambda)=\{y\in X(\Lambda):\ |y|\triangleq\sum_{u\in\Lambda}y_u=k\},\tag{29}$$

and choosing an arbitrary but fixed $y^{(k)}\in X_k(\Lambda)$ (we add the suffix Λ, if necessary), we have

$$\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ \forall y\in X_k(\Lambda),\ \exists y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n \text{ such that}\tag{30}$$
$$y_0\times z\triangleq y^{(k)}\times z\to y_1\times z\to\cdots\to y_n\times z\to y^{(n+1)}\times z\triangleq y\times z \text{ for every } z\in X(S\backslash\Lambda).$$

Put

$$\bar{q}(y^{(k)}\times z,\ y\times z)=\prod_{i=0}^{n}q(y_i\times z,\ y_{i+1}\times z),\tag{31}$$
$$\forall y\in X_k(\Lambda),$$
$$\bar{q}(y\times z,\ y^{(k)}\times z)=\prod_{i=0}^{n}q(y_{i+1}\times z,\ y_i\times z),$$

then we have

(32) **Lemma.** *Let Q have a potential. For every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $k\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ |\Lambda|\}$ we put*

$$\begin{cases}\forall y\in X(\Lambda),\ \forall z\in X(S\backslash\Lambda),\\ f_k^{\Lambda}(y\times z)\triangleq I_{X_k(\Lambda)}(y)K^{-1}(\Lambda,\ z,\ k)\dfrac{\bar{q}(y^{(k)}\times z,\ y\times z)}{\bar{q}(y\times z,\ y^{(k)}\times z)},\\ K(\Lambda,\ z,\ k)\triangleq\displaystyle\sum_{w\in X_k(\Lambda)}\frac{\bar{q}(y^{(k)}\times z,\ w\times z)}{\bar{q}(w\times z,\ y^{(k)}\times z)},\end{cases}\tag{33}$$

then $\mathscr{V}_c\triangleq\{f_k^{\Lambda}:\ \Lambda\in\mathscr{S}_f,\ 0\leqslant k\leqslant|\Lambda|\}$ satisfies:

$$0\leqslant f_k^{\Lambda}\in\mathscr{C}(X);\ f_k^{\Lambda}(x)>0 \text{ if and only if } x_{\Lambda}\in X_k(\Lambda);\tag{34}$$

$$\forall z\in X(S\backslash\Lambda),\ \sum_{y\in X_k(\Lambda)}f_k^{\Lambda}(y\times z)=1;\tag{35}$$

$$\forall\Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}_f,\ 0\leqslant\tilde{k}\leqslant|\tilde{\Lambda}|,\ \forall y_1\in X(\Lambda),\tag{36}$$
$$y_2\in X(\tilde{\Lambda}\backslash\Lambda),\ z\in X(S\backslash\tilde{\Lambda}),$$
$$f_{\tilde{k}}^{\tilde{\Lambda}}(y_1\times y_2\times z)=f_{|y_1|}^{\Lambda}(y_1\times y_2\times z)\sum_{y\in X_{\tilde{k}-|y_1|}(\Lambda)}f_{\tilde{k}}^{\tilde{\Lambda}}(y_1\times y_2\times z).$$

Proof Since Q has a poten tial, $f_k^{\Lambda}(y\times z)$ is independent of the selection of $y^{(k)}$ and the path from $y^{(k)}\times z$ to $y\times z$, hence the definition of f_k^{Λ} is justified. It is clear that (34) and (35) hold except $f_k^{\Lambda}\in\mathscr{C}(X)$ which follows from the proof of Theorem (5.8). Now we want to prove (36).

(36) is trivial when $|y_1\times y_2|\neq\tilde{k}$. Suppose $|y_1\times y_2|=\tilde{k}$ and write $|y_1|=k$, then from the potentiality of Q and (33), we obtain

$$\begin{aligned}f_{\tilde{k}}^{\tilde{\Lambda}}(y_1\times y_2\times z)&=K^{-1}(\tilde{\Lambda},\ z,\ \tilde{k})\frac{\bar{q}(y_{\tilde{\Lambda}}^{(\tilde{k})}\times z,\ y_1\times y_2\times z)}{\bar{q}(y_1\times y_2\times z,\ y_{\tilde{\Lambda}}^{(\tilde{k})}\times z)}\\&=K^{-1}(\tilde{\Lambda},\ z,\ \tilde{k})\frac{\bar{q}(y_{\tilde{\Lambda}}^{(\tilde{k})}\times z,\ y^{(k)}\times y_2\times z)}{\bar{q}(y^{(k)}\times y_2\times z,\ y_{\tilde{\Lambda}}^{(\tilde{k})}\times z)}\cdot\frac{\bar{q}(y^{(k)}\times y_2\times z,\ y_1\times y_2\times z)}{\bar{q}(y_1\times y_2\times z,\ y^{(k)}\times y_2\times z)}\\&=f_k^{\Lambda}(y_1\times y_2\times z)\sum_{y\in X_k(\Lambda)}\frac{\bar{q}(y^{(k)}\times y_2\times z,\ y\times y_2\times z)}{\bar{q}(y\times y_2\times z,\ y^{(k)}\times y_2\times z)}\\&\quad\cdot\frac{\bar{q}(y_{\tilde{\Lambda}}^{(\tilde{k})}\times z,\ y^{(k)}\times y_2\times z)}{\bar{q}(y^{(k)}\times y_2\times z,\ y_{\tilde{\Lambda}}^{(\tilde{k})}\times z)}\cdot K^{-1}(\tilde{\Lambda},\ z,\ \tilde{k})\\&=f_k^{\Lambda}(y_1\times y_2\times z)\sum_{y\in X_k(\Lambda)}f_{\tilde{k}}^{\tilde{\Lambda}}(y\times y_2\times z).\end{aligned}$$

(37) **Definition.** *Let* $\mathscr{A}(S\setminus\Lambda)=\sigma\{X_k(\Lambda)\times X(S\setminus\Lambda),\ 0\leqslant k\leqslant|\Lambda|;\ \mathscr{F}(S\setminus\Lambda)\}$. $\mu\in\mathscr{P}(X)$ *is called a canonical Gibbs state corresponding to* $c(u,\ v,\ x)$ (or $\mathscr{V}_c$), *if for every* $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$, *we have*

(38) $\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))=f^{\Lambda}_{|(\cdot)_\Lambda|}(y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\mu$—a. e. *and the set of all canonical Gibbs states corresponding to* $c(u,\ v,\ x)$ (or $\mathscr{V}_c$) *is denoted by* $\mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$.

For $\mathscr{V}_c$ *we define* $\overline{\mathscr{G}}_\Lambda(\Lambda\in\mathscr{S}_f)$ *to be the closed convex hull in weak topology of all the following* $\mu_{\Lambda,z,k}$, $z\in X(S\setminus\Lambda)$, $0\leqslant k\leqslant|\Lambda|$:

(39) $$\forall F\in\mathscr{F},\ \mu_{\Lambda,z,k}(F)\triangleq\sum_{y\in F(z)}f^{\Lambda}_k(y\times z),$$

and put

(40) $\overline{\mathscr{G}}\triangleq\{\mu\in\mathscr{P}(X)$: $\exists\Lambda_m\in\mathscr{S}_f$, $\Lambda_m\uparrow S$ and $\exists\mu_m\in\overline{\mathscr{G}}_{\Lambda_m}$ such that $\mu_m\xrightarrow{w}\mu\}$.

(41) **Theorem.** *If* Q *has a potential, then*

$$\mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)=\overline{\mathscr{G}}.$$

Proof Just similar to the proofs of Proposition (4.23) in [1] and Theorem (5.2).

From now on, we will call a measure satisfying (3.18) in [1] a positive measure, and denote the set of all positive probability measures on X by $\mathscr{P}_+(X)$, Similarly we have the set $\mathscr{R}$ of all reversible measures and the set $\mathscr{R}_+$ of all positive reversible measures. Clearly $\mathscr{R}_+=\mathscr{R}\cap\mathscr{P}(X)$. We will establish the relation between $\mathscr{R}$ and $\mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$ when Q has a potential.

(42) **Lemma.** $\mu\in\mathscr{R}$ *if and only if*

(43) $\forall f\in\mathscr{C}(X)$, $\forall u,\ v\in S$,

$$\int c(u,\ v,\ x)f(x)\mu(dx)=\int c(u,\ v,\ x)f({}_{(u,v)}x)\mu(dx).$$

Proof See [5 Lemma 2.15].

(44) **Lemma.** $\mu\in\mathscr{R}$ *if and only if*

$$\forall\Lambda\in\mathscr{S}_f,\ \forall y\in X(\Lambda),\ \forall\{u,\ v\}\subset\Lambda,$$

(45) $$c(u,\ v,\ y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))$$
$$=c(u,\ v,\ {}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\mu(\{{}_{(u,v)}y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda)).\quad\mu\text{—a. e.}$$

Proof It is easy to prove that if $\mu\in\mathscr{R}$, then (43) holds for $f=I_{(\{y\}\cap X_k(\Lambda))\times F}$, $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$, $0\leqslant k\leqslant|\Lambda|$, $F\subset\mathscr{F}_0(S\setminus\Lambda)$. So from (43) we have

$$\int_{X_k(\Lambda)\times F}c(u,\ v,\ y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\,I_{(y)\times X(S\setminus\Lambda)}\,d\mu$$
$$=\int_{X_k(\Lambda)\times F}c(u,\ v,\ {}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})I_{({}_{(u,v)}y)\times X(S\setminus\Lambda)}\,d\mu$$

for every $u,\ v\in\Lambda$, hence

$$\int_{X_k(\Lambda)\times F}c(u,\ v,\ y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))d\mu$$
$$=\int_{X_k(\Lambda)\times F}c(u,\ v,\ {}_{(u,v)}y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\mu(\{{}_{(u,v)}y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))d\mu,$$

and so (45) follows.

Conversely, if the condition is satisfied, then, taking $F \triangleq X(S\setminus\Lambda)$ in the preceding equations and deducing these equations inversely, we obtain that (43) holds for $f = I_{(y)\times X(S\setminus\Lambda)}$, $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$, $u, v\in\Lambda$, $u\neq v$. Now if $u\in\Lambda$ and $v\notin\Lambda$, then

$$\begin{aligned}\int c(u, v, \cdot) I_{(y)\times X(S\setminus\Lambda)} d\mu &= \sum_{y_1=0,1}\int c(u, v, \cdot) I_{(y\times y_1)\times(S\setminus(\Lambda\cup(v)))} d\mu \\ &= \sum_{y_1=0,1}\int c(u, v, \cdot) I_{((u,v)(y\times y_1))\times X(S\setminus(\Lambda\cup(v)))} d\mu \\ &= \int c(u, v, x) I_{(y)\times X(S\setminus\Lambda)}((u,v)x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

So (43) holds for $f\in\mathscr{A}$ and $u, v\in S$, hence (43) holds, i. e., $\mu\in\mathscr{R}$.

(46) **Lemma.** *If Q has a potential, then for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$, $z\in X(S\setminus\Lambda)$, $\{u, v\}\subset\Lambda$ and $k\in\{0, 1, \cdots, |\Lambda|\}$ we have*

$$c(u, v, y\times z) f_k^\Lambda(y\times z) = c(u, v, (u,v)y\times z) f_k^\Lambda((u,v)y\times z). \tag{47}$$

Proof f_k^Λ exists from Lemma (32). (47) is trivial when $y_u = y_v$ or $|y|\neq k$. Suppose $y^{(k)}\times z\sim y\times z$, then from the path-independence and (33), we have

$$\begin{aligned}\frac{f_k^\Lambda(y\times z)}{f_k^\Lambda((u,v)y\times z)} &= \frac{\bar q(y^{(k)}\times z, y\times z)}{\bar q(y\times z, y^{(k)}\times z)} \Big/ \frac{\bar q((u,v)y\times z, y^{(k)}\times z)}{\bar q((u,v)y\times z, y^{(k)}\times z)} \\ &= \frac{\bar q((u,v)y\times z, y\times z)}{q(y\times z, (u,v)y\times z)} = \frac{c(u, v, (u,v)y\times z)}{c(u, v, y\times z)}.\end{aligned}$$

(48) **Theorem.** *If Q has a potential, then $\mathscr{R} = \mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$.*

Proof If $\mu\in\mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$, then from (38) and (47) we know that for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$, $\{u, v\}\subset\Lambda$, the left-hand side of (45)

$$\begin{aligned}&= c(u, v, y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda}) f^\Lambda_{|(\cdot)_\Lambda|}(y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda}) \\ &= c(u, v, (u,v)y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda}) f^\Lambda_{|(\cdot)_\Lambda|}((u,v)y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda}) \\ &= \text{the right-hand sied of (45)}.\quad \mu\text{—a. e.}\end{aligned}$$

So $\mu\in\mathscr{R}$ follows from Lemma (44).

Conversely, if $\mu\in\mathscr{R}$, then for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $k\in\{0, 1, \cdots, |\Lambda|\}$, $y\in X_k(\Lambda)$, $\{u, v\}\subset\Lambda$, from (45) and (47), we obtain

$$\frac{\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda(y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})} = \frac{\mu(\{(u,v)y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda((u,v)y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})}.\quad \mu\text{—a. e.}$$

Since $y\times z\sim\tilde y\times z$ for every $\tilde y\in X_k(\Lambda)$, $z\in X(S\setminus\Lambda)$, from the above equation and (35) we obtain $\forall\tilde y\in X_k(\Lambda)$,

$$\begin{aligned}\frac{\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda(y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})} &= \frac{\mu(\{\tilde y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda(\tilde y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})} \\ &= \frac{\mu(X_k(\Lambda)\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{\sum_{\tilde y\in X_k(\Lambda)} f_k^\Lambda(\tilde y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})} = I_{X_k(\Lambda)}((\cdot)_\Lambda).\quad \mu\text{—a. e.}\end{aligned}$$

Hence, for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, $y\in X(\Lambda)$ we have

$$\begin{aligned}\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\setminus\Lambda)) &= f^\Lambda_{|y|}(y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda}) I_{X_{|y|}(\Lambda)}((\cdot)) \\ &= f^\Lambda_{|(\cdot)_\Lambda|}(y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda}).\quad \mu\text{—a. e.}\end{aligned}$$

Therefore $\mu\in\mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$.

(49) **Remark.** Theorem (48) is obtained in [4] for some special $c(u, v, x)$ (See [6; II, § 1.3]). The analogues corresponding to Lemma (42), (44), (46) and Theorem (48) (taking $c(u, x)$, ${}_ux$, $\mathscr{F}(S\backslash\Lambda)$, f^Λ and $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ instead of $c(u, v, x)$, ${}_{(u,v)}x$, $\mathscr{A}(S\backslash\Lambda)$, f_k^Λ and $\mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$ respectively) are obtained also for spin-flip processes[3]. But our proofs are simpler. In [3] Tang has proved that an infinitesimal generator of a spin-flip process is reversible if and only if the corresponding field has a potential. But the condition of potentiality is not necessary for an exclusion process. We will discuss these problems.

(50) **Theorem.** *Any speed function for an exclusion process is reversible (even condition* (1) *is not required). In detail, if we put*

$$\mathbf{0}_u \equiv 0, \ \mathbf{1}_u \equiv \mathbf{1}, \ \forall u \in S$$

and

$$\nu_0(\mathbf{0}) = \nu_1(\mathbf{1}) = 1, \quad \nu_0, \ \nu_1 \in \mathscr{P}(Z)$$

then ν_0 and ν_1 are reversible measures for the speed function.

Proof It suffices to consider ν_0 The theorem follows from.

$$\int f\Omega g d\nu_0 = f(\mathbf{0})\Omega g(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} f(\mathbf{0}) \sum_{u,v} c(u, v, \mathbf{0}) \, [g({}_{(u,v)}\mathbf{0}) - g(\mathbf{0})] = 0 = \int g\Omega f d\mu.$$

Theorem (50) can be generalized. Suppose that the field Q restricted on X_l, is symmetrizable[2], i. e., $Q_l \triangleq \{q(x, \tilde{x}): x, \tilde{x} \in X_l\}$ has a potential and

$$\sum_{x \in X_l} \hat{q}(\Delta_l, x)/\hat{q}(x, \Delta_l) < +\infty.$$

Put

$$\mu_l(x) \triangleq \frac{\hat{q}(\Delta_l, x)}{\hat{q}(x, \Delta_l)} \Big[\sum_{\tilde{x} \in X_l} \frac{\hat{q}(\Delta_l, \tilde{x})}{\hat{q}(\tilde{x}, \Delta_l)} \Big]^{-1},$$

then $\{\log \mu_l(x): x \in X_l\}$ is a potential for Q_l.

(51) **Proposition.** *If Q_l is symmetrizable, then*

(52) $$\mu \in \mathscr{P}(X), \ \mu(A) \triangleq \sum_{x \in A \cap X_l} \mu_l(x), \ A \in \mathscr{F}$$

is a reversible measure Conversely, if $\mu \in \mathscr{R}$ and $\mu(X_l) > 0$, then Q is symmetrizable.

Proof Since $\mu_l(x)$ $(x \in X_l)$ is a symmetrizing distribution for Q, from (52) we have

$$\begin{aligned} \int c(u, v, x) f(x) \mu(dx) &= \sum_{x \in X_l} c(u, v, x) f(x) \mu_l(x) \\ &= \sum_{x \in X_l} c(u, v, {}_{(u,v)}(x) f(x) \mu_l({}_{(u,v)}x) = \sum_{x \in X_l} c(u, v, x) f({}_{(u,v)}x) \mu_l(x) \\ &= \int c(u, v, x) f({}_{(u,v)}x) \mu(dx) \end{aligned}$$

for every $f \in \mathscr{C}(X)$, so $\mu \in \mathscr{R}$ follows from Lemma (42).

Conversely, since X_l is countable, $\mu(X_l) > 0$ implies that there is an $x \in X_l$, assume that $x = \Delta_l$ without loss of generality, such that $\mu(\Delta_l) > 0$. But from Lemma (42) and the monotone class theorem, we obtain

$$c(u, v, x)\mu(x) = c(u, v, {}_{(u,v)}x)\mu({}_{(u,v)}x)$$

for every $u, v \in S$, $x \in X_l$, hence $\Delta_l \rightsquigarrow x$ for every $x \in X_l$. Therefore $\mu(x) > 0 (x \in X_l)$ and Q has a potential. Furthermore Q_l is symmetrizable from the fact $\mu(X_l) \leqslant 1$.

The proposition can be improved also. we can construct a reversible measure, even if Q has a potential but it is not symmetrizable.

(53) **Lemma.** *If Q_l has a potential, then*

$$Q_l(\Lambda) \triangleq \{q(y \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}, \tilde{y} \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}) : y, \tilde{y} \in X_l(\Lambda)\}$$

is symmetrizable, where $X_l(\Lambda) = \{y \in X(\Lambda) : \sum_{u\in\Lambda} y_u = \sum_{u\in\Lambda} (\Delta_l)_u\}$, $\Lambda \in \mathscr{S}_f$.

Proof By the hypothesis, there is $\{v(x) : x \in X_l\}$ such that $v(x) > 0$, $\forall x \in X_l$ and

$$v(x) q(x, \tilde{x}) = v(\tilde{x}) q(\tilde{x}, x), \quad x, \tilde{x} \in X_l.$$

In particular, taking $x = y \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}$ and $\tilde{x} = \tilde{y} \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}$ for $y, \tilde{y} \in X_l(\Lambda)$, we know that $Q_l(\Lambda)$ has a potential and

$$\pi(y \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}) = v(y \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}) \Big[\sum_{\tilde{y}\in X_l(\Lambda)} v(\tilde{y} \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda})\Big]^{-1}$$

is a symmetrizable distribution for $Q_l(\Lambda)$.

Now we set

$$\pi_{l,\Lambda}(y) \triangleq \pi(y \times (\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}), \quad y \in X_l(\Lambda),$$

$$\mu_{l,\Lambda}(F) \triangleq \pi_{l,\Lambda}(F((\Delta_l)_{S\setminus\Lambda}) \cap X_l(\Lambda)), \quad F \in \mathscr{F}.$$

Clearly $\mu_{l,\Lambda} \in \mathscr{P}(X)$. Taking $\Lambda_m \uparrow S$ such that $\mu_{l,\Lambda_m} \xrightarrow{w} \mu_l (m \to \infty)$, we have

(54) **Proposition.** $\mu_l \in \mathscr{R}$ *and* $\mu_l(\overline{X}_l) = 1$,

where $\overline{X}_l$ is the closure of X_l in X.

Proof From Lemma (53), it is clear that

$$\int c(u, v, x)[f((u,v)x) - f(x)]\mu_{l,\Lambda_n}(dx) = 0, \quad f \in \mathscr{C}(X)$$

when $\Lambda_n \supset \{u, v\}$, Since $c(u, v, \cdot)[f((u,v)(\cdot)) - f(\cdot)] \in \mathscr{C}(X)$, $\mu_{l,\Lambda_n} \xrightarrow{w} \mu_l$, from Lemma (42) we obtain $\mu_l \in \mathscr{R}$, and

$$\mu_l(\overline{X}_l) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mu_{l,\Lambda_n}(X_l) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \pi_{l,\Lambda_n}(X_l(\Lambda)) = 1.$$

(55) **Theorem.** *If $\mathscr{R}_+ \neq \emptyset$, then Q has a potential and $\mathscr{R}_+ = \mathscr{P}_+(X) \cap \mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$.*

Proof From the hypothesis and Lemma (44), we know that for every $\Lambda \in \mathscr{S}_f$ there is an N_Λ such that $\mu(N_\Lambda) = 0$ and

$$(45)' \qquad c(u, v, y \times x_{S\setminus\Lambda})\mu(\{y\} \times X(S\setminus\Lambda) \mid \mathscr{A}(S\setminus\Lambda))(x)$$
$$= c(u, v, (u,v)y \times x_{S\setminus\Lambda})\mu(\{(u,v)y\} \times X(S\setminus\Lambda) \mid \mathscr{A}(S\setminus\Lambda))(x)$$

for every $x \notin N_\Lambda$, $y \in X(\Lambda)$, $\{u, v\} \subset \Lambda$. Moreover, for each $k \in \{0, 1, \cdots, |\Lambda|\}$ and $y_0 \in X_k(\Lambda)$, there is an $x^{(\Lambda,k)} \notin N_\Lambda$ such that $\mu(\{y_0\} \times X(S\setminus\Lambda) \mid \mathscr{A}(S\setminus\Lambda))(x^{(\Lambda,k)}) > 0$, because $\mu \in \mathscr{P}_+(X)$. So from (45)′, we have

$$\mu(\{y\} \times X(S\setminus\Lambda) \mid \mathscr{A}(S\setminus\Lambda))(x^{(\Lambda,k)}) > 0, \quad y \in X_k(\Lambda).$$

So from this and (45)′, we know that (we write $z^{(\Lambda,k)} = (x^{(\Lambda,k)})_{S\setminus\Lambda}$)

$$c(u, v, y \times z^{(\Lambda,k)})c(v, w, (u,v)y \times z^{(\Lambda,k)})c(w, u, (w,u)y \times z^{(\Lambda,k)})$$
$$= c(u, w, y \times z^{(\Lambda,k)})c(w, v, (u,w)y \times z^{(\Lambda,k)})c(v, u, (v,u)y \times z^{(\Lambda,k)})$$

for $y\in X_k(\Lambda)$ and $u, v, w\in\Lambda$. This equality implies(19), because $\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}_f}\bigcup_{0\leq k\leq|\Lambda|}X_k(\Lambda)\times\{z^{(\Lambda,k)}\}$ is dense in X and $c(u, v, \cdot)\in\mathscr{C}(X)$. Then Q has a potential from Theorem (18), and $\mathscr{R}_+=\mathscr{P}_+(X)\cap\mathscr{R}=\mathscr{P}_+(X)\cap\mathscr{G}_c(\mathscr{V}_c)$follows from Theorem (48).

(56) **Remarke.** Using these proofs, we can easily prove that $\mathscr{R}\neq\emptyset\Rightarrow Q$ has a potential[3] for the spin-flip processes. In fact, that Q has a potential implies that $\mathscr{R}=\mathscr{G}(\mathscr{V})=\widetilde{\mathscr{G}}\neq\emptyset$. Conversely, if $\mathscr{R}\neq\emptyset$, then we obtain

$$c(u, y\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{F}(S\setminus\Lambda))$$
$$=c(u, {}_uy\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{F}(S\setminus\Lambda)).\ \mu\text{---a. e.}$$

This implies that there is an x^Λ such that

$$\mu(\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)\,|\,\mathscr{F}(S\setminus\Lambda))(x^\Lambda)>0,\ \forall y\in X(\Lambda),$$

so (13) holds, and a potential.

Finally, we discuss the relation between reversibility and quasi-reversibility.

(57) **Theorem.** *Suppose that $c(u, v, \cdot)$ has a finite range. $r(\{u, v\})$* is the same as (3.15)in [1]. *For every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, we put $\partial\Lambda\triangleq(\setminus\Lambda\bigcup_{u,v\in\Lambda}r(\{u, v\}))$(See definition*(4.30)in [1]). *Also suppose that there are $\{\Lambda_m\}\subset\mathscr{S}_f$ such that $\Lambda_m=\Lambda_{m-1}\cup\partial\Lambda_{m-1}$, $\Lambda_m\neq\Lambda_{m-1}$, $m\geq1$, $\Lambda_m\uparrow S$. Then $\mu\in\mathscr{R}_+$ if and only if μ is a* quasi-*reversible measure for $c(u, v, \cdot)$.*

Proof From Theorem (3.25) in [1], positive reversibility implies quasi-reversibility. (But it is more simple if we use (43) and the proof of Theorem (3.25) in [1] to check the condition for quasi-reversibility.)

Conversely, suppose that μ is a quasi-reversible measure for $c(u, v, \cdot)$, then we have

$$c(u, v, y)\mu_\Lambda(y)=c(u, v, {}_{(u,v)}y)\mu_\Lambda({}_{(u,v)}y),\ y\in X(\Lambda) \tag{58}$$

for every $u, v\in S$ and $\Lambda\supset r\{u, v\}$ (here we use $c(u, v, y)$ instead of $c(u, v, y\times z)$, $z\in X(S\setminus\Lambda)$ arbitrarily).

Take $m\geq1$, $u, v\in\Lambda_{m-1}$, $y\in X(\Lambda_{m-1})$ and $f=I_{\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)}$, then $r(\{u, v\})\subset\Lambda_m$, and

$$\int c(u, v, x)f(x)\mu(dx)=\int_{\{y\}\times X(\Lambda_m\setminus\Lambda_{m-1})}c(u, v, y\times w)\mu_m(d(y\times w))$$
$$=\sum_{w\in X(\partial\Lambda_{m-1})}c(u, v, y\times w)\mu_m(y\times w),$$

where $\mu_m\triangleq\mu_{\Lambda_m}$. Similarly, we have

$$\int c(u, v, x)f({}_{(u,v)}x)\mu(dx)=\sum_{w\in X(\partial\Lambda_{m-1})}c(u, v, {}_{(u,v)}y\times w)\mu_m({}_{(u,v)}y\times w),$$

so the equation in (43) holds from (58).Note that for every $\Lambda\in\mathscr{S}_f$, there is an $m\geq1$ such that $\Lambda\subset\Lambda_{m-1}$. By the preceding proof, it is easy to show that the equation in (43) holds for $f=I_{\{y\}\times X(S\setminus\Lambda)}$, $y\in X(\Lambda)$, $u, v\in\Lambda$, $u\neq v$. Hence (43) holds (See the last part of the proof of Lemma (44)). Therefore $\mu\in\mathscr{R}$, and $\mu\in\mathscr{P}_+(X)$ implies $\mu\in\mathscr{R}_+$.

References

[1] Yan Shijing, Chen Mufa and Ding wanding, Potentiality and reversibility for general speed functions (I), *Chinese Annales of Maths*, **3**: 5 (1982).

[2] Hou zhen-ting and Chen Mu-fa, Markov processes and field theory, *Kexue Togbao* (in English), **25**: 10 (1980), see [4] Ch. 6.

[3] Tang Shou-zheng, Reversibility for spin-flip processes (to appear).

[4] Qian Min, Hou Zhen-ting and others, Reversible Markov Processes, Hunan, China (1979).

[5] Georgii, H. O., Canonical Gibbs states, *Lecture Notes in Maths.*, 761, Springer-Verlag (1979).

[6] Liggett, T. M., The stochastic evolutions of infinite systems of interacting particles, *Lecture Notes in Maths.*, 598, 187—248, Springer-Verlag (1977).

[7] Liggett, T. M., Existence theorem for infinite particle systems, *TAMS.*, **165** (1972), 471—481.

[8] Logan, K. G., Time reversible evolutions in statistical mechanics, *Cornell University Ph. D.*, thesis (1974).

[9] Parthasarathy, K. R., Probability measures on metric spaces, New York, Academic Press (1967).

一般速度函数的有势性与可逆性

II. 紧空间情形

严士健　陈木法　　丁万鼎

（北京师范大学）　（安徽师范大学）

摘　要

在这一部分中，我们应用前一部分的方法和结果于紧空间情形.

§5 就紧空间的情形证明了满足(I)中(4.3)的有限程速度函数的拟可逆性等价于有势性(定理(5.1)). 证明了 $\tilde{\mathscr{G}}=\tilde{\mathscr{G}}(\mathscr{V})$，并推广了与此有关的自旋变相过程的结果(定理(5.2),(5.3)). 还证明了在某些条件下，拟可逆与可逆的等价性(定理(5.14)). §6 我们着重讨论了排它过程(不限于有限程)的有势性与可逆性，得到了较完整的结果. 首先给出了有势性的简洁判准(定理(6.18))，这个判准原则上已不能再改善，对排它过程，证明了：可逆测度必存在(定理(6.50))；若速度函数有势，则可逆测度由速度函数构造的典型Gibbs态来刻划(定理(6.48))；反之，若有正可逆测度存在，则它有势且正可逆测度集与正典型Gibbs态集相等(定理(6.55)). 对于自旋变相过程的情形，文中在有关地方注明用本文的方法也可得出[3]的相应结果.

附录一. λ_π 不变测度

设 E 是局紧、可分度量空间，$\mathcal{E}$ 为其上的 Borel 域. 假设 $P(t,x,\cdot)$ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的次 Markov 转移函数，满足

i). $(t,x)\to P_t\varphi(x)$ 在 $[0,\infty)\times E$ 上连续，$\varphi\in C_0(E)$ ≡ 具紧支持的连续函数;

ii). 存在 $\psi_0\in C_0^+(E)$ 使得，对于 E 的每一子紧集 K，存在 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使 $P_t\psi_0\geq\varepsilon I_K$.

命

$$X^+=\{\mu:\ \mu 和\ \mu P_t\ (\forall t\geq 0)\ 为\ (E,\mathcal{E})\ 上的非负\ Radon\ 测度\}$$

则 X^+ 凸锥体. 对于每 $\lambda\in\mathbb{R}$，命

$$\mathcal{C}_\lambda=\{\mu\in X^+:\ e^{-\lambda t}\mu P_t\uparrow\mu,\ t\downarrow 0\}$$

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\lambda=\mathcal{C}_\lambda\setminus\{0\}.$$

再命

$$\lambda_\pi=\inf\{\lambda\in\mathbb{R}:\ \widetilde{\mathcal{C}}_\lambda\neq\phi\}$$

D. Stroock[45] 证明了如下结果:

$$-\infty<\lambda_\pi\leq 0\quad 且\quad \mathcal{C}_{\lambda_\pi}\neq\{0\}.$$

关于 λ_π，他作了不少分析. 他证明了 λ_π 可以用几种不同的方式来刻划. 从某种意义上说，

λ_π 是常返与非常返的分界点. 因此, 他与 D. Sullivan 都提议如下

猜想:[45] 在一般的合理假设之下, 存在正的 Radon 测度 μ, 使

$$e^{\lambda_\pi t}\,\mu P_t = \mu, \qquad \forall t \geq 0$$

是对的. 这种测度称为 λ_π 不变测度. 他们把有关这类的研究称为 λ_π 位势理论.

在 [45] 中, Stroock 已证明, 在许多情况下, 这个猜想成立.

笔者首先构造了若干反例, 说明这一猜想在一般情况下是不对的.[17] 进一步, 笔者将 $\lambda_\pi < 0$ 的情形归结为 $\lambda_\pi = 0$ 的情形. 这样, λ_π 位势理论的研究便归结为通常位势理论的研究, 从而使问题得以解决. 为此, 命

$$f(x) = \int_0^\infty P_t \psi_0(x)\, e^{-\lambda_\pi t}\, dt, \qquad x \in E$$

$$\hat{P}(t, x, dy) = f(x)^{-1} P(t, x, dy)\, f(y)$$

则我们有

定理.[17] $l_{\lambda_\pi} \neq \{0\} \Longleftrightarrow \hat{l} \neq \{0\}$.

此处 l_{λ_π} 为 λ_π 不变测度之集而 $\hat{l}$ 是关于 $\hat{P}_t$ 的不变测度集.

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

附录 1 Lambda-Pi Invariant Measure

MU-FA CHEN
DANIEL W. STROOCK

λ_π-invariant measures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 205-220.
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__205_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/semproba/index.shtml), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

λ_π-invariant Measures

Mu Fa Chen
Department of Mathematics
Bejing Normal University
Bejing
People's Republic of China

Daniel W. Stroock*
Department of Mathematics
University of Colorado
Boulder, Colorado 80309

§1. Introduction

1. Notations and assumptions.

Let E be a locally compact, separable metric space, and use $\mathcal{B}$ to denote the Borel field over E. Suppose that $P_t(x,\cdot)$ is a sub-Markovian transition function on $(E,\mathcal{B})$ satisfying

i) $(t,x) \to P_t\phi(x)$ is continuous on $[0,\infty) \times E$ for each $\phi \in C_0(E) \equiv \{\phi : \phi \in C(E) \text{ has compact support}\}$,

ii) there exists a $\psi_0 \in C_0^+(E)$ such that for each $K \subset\subset E$ (i.e. K is a compact subset of E) there is a $t > 0$ and an $\varepsilon > 0$ for which $\varepsilon I_K \leq P_t\psi_0$.

Let

$X^+ = \{\mu : \mu$ and μP_t are non-negative Radon measures on $(E,\mathcal{B})$ for each $t > 0\}$.

We endow X^+ with the vague topology.

For $\lambda \in R$, we put

$$\mathfrak{C}_\lambda = \{\mu \in X^+ : e^{-\lambda t}\mu P_t \uparrow \mu \text{ as } t \downarrow 0\}$$

$$\tilde{\mathfrak{C}}_\lambda = \{\mu \in \mathfrak{C}_\lambda : \mu \neq 0\}, \quad \mathfrak{C}_\lambda(g) = \{\mu \in \mathfrak{C}_\lambda : \mu(g) = 1\}$$

$$\lambda_\pi = \inf\{\lambda \in R : \tilde{\mathfrak{C}}_\lambda \neq \phi\}$$

One basic theorem of [9] is the following:

2. Theorem.

$\lambda_\pi \in (-\infty,0]$,

$$\mathfrak{C}'_{\lambda_\pi} \equiv \{\mu \in X^+ : e^{\lambda_\pi t}\mu \geq \mu P_t \text{ for each } t > 0\} \neq \{0\}.$$

*Partially supported by NSF grant MCS 80-07300.

We note that if $\mu \in \mathfrak{C}'_{\lambda_\pi}$ and $\mu \neq 0$, then $\nu \equiv \lim_{t \downarrow 0} e^{\lambda_\pi t} \mu P_t$ satisfies

$$e^{-\lambda_\pi t} \nu P_t \leq e^{\lambda_\pi t} \mu P_t \leq \nu .$$

From this fact and (1.ii) it is easy to see that $\nu \in \mathfrak{C}_{\lambda_\pi}$ and $\nu \neq 0$, hence $\tilde{\mathfrak{C}}_{\lambda_\pi} \neq \phi$.

In order to describe the number λ_π, the second author showed in [9] that λ_π is closely related to the rate at which the process exists from open sets and also to the spectrum of the operators $\{P_t\}$. His conclusions confirm that the number λ_π is a critical point. In some sense, it is a border between recurrence and transience. These considerations led him to rephrase a conjecture of D. Sullivan as follows.

3. Conjecture. [9, (3.1)]. Under reasonably general hypotheses about $\{P_t : t > 0\}$, there exists a positive Radon measure μ satisfying

$$e^{\lambda_\pi t} \mu = \mu P_t \quad \text{for each} \quad t > 0 .$$

The second author already proved this conjecture in some cases. One of his general results is:

4. Theorem. If $\{e^{-\lambda_\pi t} P_t : t > 0\}$ is recurrent in the sense that there is no positive Radon measure ν for which $\int_0^\infty e^{-\lambda_\pi t} \nu P_t dt$ is a Radon measure, then each $\mu \in \mathfrak{C}_{\lambda_\pi}$ satisfies $e^{\lambda_\pi t} \mu = \mu P_t$, $t \geq 0$. In particular, there is a positive Radon measure which is $\{e^{-\lambda_\pi t} P_t : t > 0\}$ invariant.

Unfortunately, this conjecture is not true in general. The original counterexample was found in the context of Markov chains. This example, along with other related examples, is given in the next section. Later, S.R.S. Varadhan suggested a method of producing a counterexample with a diffusion process. We now present an example based on Varadhan's idea.

Let Δ the ordinary Laplacian on R^3. Choose a smooth $\rho : R^3 \to (0,\infty)$ so that the diffusion generated by $L = \frac{1}{2} \rho \Delta$ explodes with positive probability (cf. Exercise 10.3.3 on p. 260 of [10]). Denote by

$\{P_t : t > 0\}$ the minimal Markov semigroup generated by L (i.e. $\{P_t : t > 0\}$ is the semigroup associated with the process which is "killed" when it explodes). Set $m(dy) = 1/\rho(y)dy$. Then $P_t f(x) = \int_{R^3} p(t,x,y)f(y)m(dy)$, $f \in C_b(R^3)$ where $p: (0,\infty) \times R^3 \times R^3 \to (0,\infty)$ is smooth and is symmetric with respect to x and y . Moreover, if $\tilde{L}$ denotes the Friedrich's extension in $L^2(m)$ of $L\big|_{C_0^\infty(R^3)}$, then $P_t = e^{t\tilde{L}}\big|_{C_b(R^3)}$. (These facts can be checked directly or as a consequence of the results in [6]). Combining these observations with (2.6) in [9] , one concludes that $\lambda_\pi = \sup\{(\phi,L\phi)_{L^2(m)} : \phi \in C_0^\infty(R^3)$ and $\|\phi\|_{L^2(m)} = 1\}$. But $(\phi,L\phi)_{L^2(m)} = (\phi,1/2\Delta\phi)_{L^2(\text{Lebesgue})}$, and so $\lambda_\pi = 0$. Thus, we will have a counterexample once we show that there is no non-zero Radon measure μ satisfying $\mu P_t = \mu$, $t > 0$. But if $\mu P_t = \mu$, $t > 0$, then $\mu(dy) = f(y)dy$ where $f \in C^\infty(R^3)^+$ and $\Delta(\rho * f) = 0$. Hence, $\rho * f$ would be constant, and so we would conclude that $mP_t = m$, $t > 0$. In particular, we would have

$$\int_{R^3} g(x)(1-P_t 1(x))m(dx) = \int_{R^3} g(x)m(dx) -$$

$$- \int_{R^3} P_t g(x)m(dx) = 0$$

for all $t > 0$ and $g \in C_b(R^3)$. Since this would mean that $P_t 1 = 1$ for all $t > 0$, we see that no such μ exists.

5. Definition. Let $\lambda \in R$ be given. Each μ in $\mathfrak{C}_\lambda$ is called a λ-excessive measure. $\mu \in \mathfrak{C}_\lambda$ is said to be a λ-invariant measure if

$$e^{\lambda t}\mu = \mu P_t \quad \text{for each} \quad t > 0 \ .$$

Denote the set of all λ-invariant measures by $\mathfrak{I}_\lambda$. We also write $\tilde{\mathfrak{I}}_\lambda = \mathfrak{I}_\lambda \cap \tilde{\mathfrak{C}}_\lambda$, $\mathfrak{I}_\lambda(g) = \mathfrak{C}_\lambda(g) \cap \mathfrak{I}_\lambda$ and put

$$P_t^\lambda = e^{-\lambda t}P_t \ , \quad t > 0 \ .$$

Finally, a non-negative $\mathfrak{B}$-measurable function h is called a λ-excessive function, if

$$P_t^\lambda h \uparrow h \quad \text{as} \quad t \downarrow 0$$

and $h < \infty$ a.e. with respect to $P_t(x,\cdot)$ for each $t > 0$ and $x \in E$.

In §3 we will give a limit procedure for computing the elements of $\mathcal{S}_0$ by the Dynkin's machine [5] . As for $\mathcal{S}_{\lambda_\pi}$ when $\lambda_\pi < 0$, we already know from (4) that it is enough to study non-recurrent $\{P_t^{\lambda_\pi} : t > 0\}$, and in that case we are able to reduce the study of $\mathcal{S}_{\lambda_\pi}$ to the study of $\mathcal{S}_0$ for a new transition function.

In §4 , we use the following lemma from [8] :

6. Lemma. Replace (1.i) with the assumption that for each $t > 0$, $P_t\psi_0$ is positive everywhere. Let $\lambda \in R$ and $\mu \in \mathcal{S}_\lambda$. Then $\mu \in \mathcal{S}_\lambda$ if and only only if there is a $T > 0$ for which $\mu\psi_0 = \mu P_T^\lambda \psi_0$.

This lemma allows us to focus on the discrete case which is discussed in §4 . In particular, we will show how to extend a result due to Harris [7] and Veech [11] .

§2. Counterexamples From Markov Chains

Let $E = \{0,1,2,\cdots\}$. We call $P(t) = (P_{ij}(t) : i,j \in E)$ $(t > 0)$ a sub-Markov transition function, if

$$P_{ij}(t) \geq 0 , \quad \sum_{j\in E} P_{ij}(t) \leq 1 , \quad P_{ij}(t+s) = \sum_{k\in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s)$$

and $\lim_{t\downarrow 0} P_{ij}(t) = \delta_{ij}$ $(\delta_{ii} = 1 , \delta_{ij} = 0 \ (i \neq j))$ for any i and j in E
It is well known that the following limits:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij} \ (i \neq j) \quad \text{and} \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1-P_{ii}(t)}{t} = q_i$$

all exist. We set $q_{ii} = -q_i$. Then

$$0 \leq q_i \leq \infty , \quad 0 \leq q_{ij} < \infty \ (i \neq j) , \ \sum_{j\neq i} q_{ij} \leq q_i \tag{7}$$

The matrix $Q = (q_{ij})$ is called a Q-matrix. A sub-Markov transition function with this matrix (q_{ij}) is called a Q-process.

In this context, (1.i) and (1.ii) become the assumption that for all $i,j \in E$, $P_{ij}(t) > 0$. Thus we make this assumption about $P(t)$. Also, it is natural to fix

$$g(x) = I_{\{0\}}(x) \ .$$

8. Theorem. If $\mu \in \mathfrak{S}_\lambda(g)$, then

$$\lambda > -q_i \quad \text{and} \quad (\lambda+q_i)\mu_i \geq \sum_{j\neq i} \mu_j q_{ji}$$

for each $i \in E$. In particular, we have

$$\lambda_\pi \geq -\inf_{i\in E} q_i \ .$$

Proof. Let

$$\tilde{P}_{ij}(t) = \mu_j P^\lambda_{ji}(t)/\mu_i \ , \quad i,j \in E \tag{9}$$

It is easy to check that $\tilde{P}(t)$ is a Q-process with Q-matix $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij})$:

$$\tilde{q}_i = -\tilde{q}_{ii} = \lambda_\pi + q_i \ , \quad \tilde{q}_{ij} = \mu_j q_{ji}/\mu_i \quad (i \neq j)$$

hence the assertions follow from (7) and the fact that $\tilde{P}(t) > 0$.

In order to remove time from our consideration, we will need the next lemma.

10. Lemma. Assume that $P(t)$ is a Q-process, totally stable (i.e. $q_i < \infty$ for each $i \in E$), and satisfies the forward Kolmogorov equations:

$$P'_{ij}(t) = -P_{ij}(t)q_j + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)q_{kj} \tag{11}$$

Also assume that $\mu = \mu P(t)$. Then

$$\mu_j q_j = \sum_{i\neq j} \mu_i q_{ij} \ , \quad \forall j \in E \ . \tag{12}$$

Proof. [8] We have

$$\sum_{i=0}^{N} \mu_i P'_{ij}(t) = -q_j \sum_{i=1}^{N} \mu_i P_{ij}(t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k\neq j} \mu_i P_{ik}(t) q_{kj} \tag{13}$$

The sum $\sum_{i=0}^{N} \mu_i P_{ij}(t)$ is non-negative, continuous in t and it monotonically increases to μ_j as $N \to \infty$. Similarly, the second sum on the right side in (13) is non-negative, continuous in t and it monotonically increases to $\sum_{i\neq j} \mu_i q_{ij}$, which is finite by (8) (cf. [1, II§3, Theorem 1]). Hence, by Dini's theorem, these sums converge uniformly for t in a finite interval. Consequently, differentiation and summation can be interchanged in (13) when

$N = \infty$ and so (12) follows.

14. Lemma. Equations $\mu_j q_{ij} = \sum_{i \neq j} \mu_i q_{ij}$ $(j \in E)$ have a positive solution (μ_i) if and only if the equation $\nu = \nu\overline{P}$ has a positive solution (ν_i), where $\overline{P}_{ii} = 0$, $\overline{P}_{ij} = q_{ij}/q_i$ $(i \neq j)$. Moreover, we can pass from one to the other by taking $\nu_i = \mu_i q_i$ $(i \in E)$.

Proof. Obvious.

15. Theorem*). Let $Q = (q_{ij})$ be a totally stable, irreducible and conservative (i.e. $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ for each $i \in E$) Q-matrix. Suppose that there is precisely one Q-process and that it is transient. Then, in order that $\tilde{\mathfrak{I}}_0 \neq 0$, the following condition is necessary: there exists an infinte subset $\{i_1, i_2, \cdots\}$ of distinct integers such that

$$\overline{P}_{i_2 i_1} > 0 \ , \ \overline{P}_{i_3 i_2} > 0 \ , \ \cdots \ , \ \overline{P}_{i_{n+1} i_n} > 0 \tag{16}$$

where $\overline{P} = (\overline{P}_{ij})$ is defined in (14). In particular, if $\lambda_\pi = 0$, then this gives a necessary condition for $\mathfrak{I}_{\lambda_\pi} \neq \emptyset$.

Proof. Because of (10) and (14), we need only consider the solutions to $v = v\overline{P}$. But now our condition comes from Harris' observation [7, Theorem 1].

17. Example. Take $\overline{P}_{00} = 0$; $\overline{P}_{0i} = P_i > 0$ $(i \geq 1)$, $\sum_{i=1}^{\infty} P_i < 1$; $P_{i0} = 1$ $(i \geq 1)$. It is clear that this $\overline{P}$ does not satisfy the condition (16). So the equation $v = v\overline{P}$ has no positive solution. This fact is also very easy to check directly.

We now take $0 < q_i \downarrow 0$ as $i \uparrow \infty$, $q_{ij} = \overline{P}_{ij} q_i$ $(i \neq j)$. With this Q-matrix, the Q-process is unique (since $Q = (q_{ij})$ is bounded). Hence the unique Q-process $P(t)$ satisfies the Kolmogorov forward equations. Moreover, $P(t)$ is transient since $\overline{P}$ is. Finally, (8) implies that $\lambda_\pi = 0$ since $q_i \downarrow 0$. We therefore see that $\tilde{\mathfrak{I}}_{\lambda_\pi} \neq \tilde{\mathfrak{I}}_0 = \emptyset$.

---

*) We will give a more general result later (see (32)).

Notice that $P(t)$ is symmetric, because $\overline{P}$ is symmetric with respect to $\{\mu_0 = 1 , \mu_i = P_i , i \geq 1\}$ and therefore $Q = (q_{ij})$ is symmetric with respect to $(\mu_i/q_i = i \in E)$ which, by uniqueness, means that $P(t)$ is. On the other hand, $\sum_{j\in E} P_{ij}(t) < 1$ $(\forall i \in E)$, hence, we now have a counterexample which is symmetric but also a stopped Q-process.

To get an example of a non-stopped (conservative) Q-process for which the conjecture fails, we proceed as follows.

18. Example [2]. Take $\overline{P}_{i,i+1} = P_i > 0$, $\overline{P}_{i0} = 1 - P_i$ $(i \in E)$. It is easy to see that there is a (unique) positive solution to $v = v\overline{P}$ $(v_0 = 1)$ if and only if $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} P_k = 0$. We now take (P_i) satisfying $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} P_k \neq 0$ and take $0 < q_i \downarrow 0$ as $i \uparrow \infty$. By (10) , (14) and (8) we see that $\lambda_\pi = 0$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_{\lambda_\pi} = \tilde{\mathfrak{I}}_0 = \emptyset$.

We note that if we take $p_0 = 1$ then $\sum_{j\in E} P_{ij}(t) = 1$ $(\forall i \in E)$, i.e. $P(t)$ is non-stopped, since $Q = (q_{ij})$ is conservative and bounded.

Before moving on from Markov chains, we note that in the chain setting Theorem (4) can be improved. Namely,

19. Theorem. If $\{e^{-\lambda_\pi t} P_{ij}(t)\}$ is recurrent in the sense that $\int_0^\infty e^{-\lambda_\pi t} P_{ii}(t)dt = \infty$ for each $i \in E$, then there is precisely one $\mu \in \mathfrak{I}_{\lambda_\pi}(g)$ and μ satisfies:

$$\mu_i = \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{r=1}^{n} P_{0i}^{(r)} e^{-\lambda_\pi r}\Big]\Big/\Big[\sum_{r=0}^{n} P_{00}^{(r)} e^{-\lambda_\pi r}\Big] \qquad (20)$$

for each $i \in E$,

where $(P_{ij}^{(r)}) = (P_{ij}(1))^r$.

Proof. The existence comes from (4) . To prove the uniqueness and (20) notice that if $\mu \in \mathfrak{I}_{\lambda_\pi}(g)$ then the corresponding $\tilde{P}(t)$ defined in (9) is a recurrent process and

$$\frac{\sum_{r=1}^{n} \tilde{P}_{i0}(rt)}{\sum_{r=0}^{n} \tilde{P}_{00}(rt)} = \frac{1}{\mu_i} \cdot \frac{\sum_{r=1}^{n} P_{0i}^{(r)}(t) e^{-\lambda_\pi tr}}{\sum_{r=0}^{n} P_{00}^{(r)}(t) e^{-\lambda_\pi tr}} \qquad (\forall i , \forall t)$$

Hence

$$\mu_i = \frac{\sum_{r=1}^{n} P_{0i}^{(r)} e^{-\lambda_\pi r}}{\sum_{r=0}^{n} P_{00}^{(r)} e^{-\lambda_\pi r}} \Big(\sum_{r=1}^{n} \tilde{P}_{i0}^{(r)} \Big)^{-1} \quad , \quad \forall i$$

But $\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{r=1}^{n} \tilde{P}_{i0}^{(r)} \Big)^{-1} \Big(\sum_{r=0}^{n} \tilde{P}_{00}^{(r)} \Big) = 1$ by [1; I.§9. Theorem 5).

§3. Minimal λ_π-invariant Measures

We begin this section with a description of the minimal elements of $\mathfrak{I}_0$.

Fix a strictly positive function $g \in \mathfrak{B}$. Denote the set of all extreme points of $\mathfrak{C}_0(g)$ by $\mathfrak{C}_0^e(g)$. As in [4] or [5] , we can endow a convex measurable structure to $\mathfrak{C}_0(g)$: the σ-algebra in $\mathfrak{C}_0(g)$ is generated by the sets $\{\mu \in \mathfrak{C}_0(g) : \mu(B) < u\}$, $B \in \mathfrak{B}$, $u \in R$. A measurable subset $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}_0(g)$ is called a face if for every probability measure on $\mathfrak{C}_0(g)$ the measure μ_η given by

$$\mu_\eta(B) = \int_{\mathfrak{C}_0^e(g)} \tilde{\mu}(B)\eta(d\tilde{\mu}) \quad , \quad B \in \mathfrak{B} \tag{21}$$

is in $\mathfrak{D}$ when and only when η is concentrated on $\mathfrak{D}$.

22. Lemma. $\mathfrak{I}_0(g)$ is a face of $\mathfrak{C}_0(g)$.

Proof. By (6) , we have for any $t > 0$:

$$\mathfrak{I}_0(g) = \bigcap_{\phi \in C_0(E)} \{\mu \in \mathfrak{C}_0(g) : \mu(\phi) = \mu P_T(\phi)\}$$

Hence $\mathfrak{I}_0(g)$ is measurable in $\mathfrak{C}_0(g)$. It is clear that μ_η defined in (21) belongs to $\mathfrak{I}_0(g)$ if η is concentrated on $\mathfrak{I}_0(g)$. We now assume that μ_η defined in (21) belongs to $\mathfrak{I}_0(g)$. Then

$$\mu(\phi) = \int_{\mathfrak{C}_0^e(g)} \tilde{\mu}(\phi)\eta(d\tilde{\mu}) = \int_{\mathfrak{C}_0^e(g)} \tilde{\mu}P_T(\phi)\eta(d\tilde{\mu})$$

hence

$$\int_{\mathfrak{C}_0^e(g)\setminus\mathfrak{I}_0(g)} (\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\mu}P_T(\phi))\eta(d\tilde{\mu}) = 0 \quad , \quad \forall \phi \in C_0(E) \quad . \tag{23}$$

Put

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{C}_0^e(g) \setminus \mathfrak{I}_0(g)$$

$$\mathfrak{D}'_\phi = \{\tilde{\mu} \in \mathfrak{D}' : \tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\mu}P_T(\phi) > 0\}$$

then, by (23), we have

$$\eta(\mathfrak{D}) = \eta\Big(\bigcup_{\phi \in C_0(E)} \mathfrak{D}'_\phi\Big)$$

$$\leq \sum_{\phi \in C_0(E)} \eta(\mathfrak{D}'_\phi) = 0$$

Therefore η is concentrated on $\mathfrak{I}_{0,g}$.

It was shown in [4; 6.1] that the set of all extreme points of a face is just $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{C}_0^e(g)$. Hence the set of all extreme points of $\mathfrak{I}_0(g)$, denoted by $\mathfrak{I}_0^e(g)$, is the subset $\mathfrak{I}_0^e(g) \cap \mathfrak{C}_0^e(g)$ of $\mathfrak{C}_0^e(g)$.

Let M be the class of non-negative measures. We say that $m \in M$ is minimal, if the relation $m = m_1 + m_2$, $m_1, m_2 \in M$ implies that m_1 and m_2 are proportional to m. It is now easy to see that μ is a minimal elements of $\tilde{\mathfrak{C}}_0$ if and only if μ is an extreme point of $\mathfrak{C}_0(g)$ for some g Thus, we may use [5; Lemma 2.2, Theorem 2.1 and Theorem 2.2] to give some limit procedures for computing the minimal elements of $\tilde{\mathfrak{I}}_0$.

Set

$$E_c = \{x \in E : \int_0^\infty P_t g(x)dt = \infty\}$$

$$E_d = \{x \in E : \int_0^\infty P_t g(x)dt < \infty\}$$

$$\mu_c = \mu\big|_{E_c}, \quad \mu_d = \mu\big|_{E_d}, \quad \mu \in \tilde{\mathfrak{C}}_0$$

$$\mathfrak{I}_{0,c} = \{\mu \in \tilde{\mathfrak{I}}_0 : \mu = \mu_c\},$$

$$\mathfrak{I}_{0,d} = \{\mu \in \tilde{\mathfrak{I}}_0 : \mu = \mu_d\}.$$

24. Theorem. Let μ be a minimal element of $\tilde{\mathfrak{I}}_0$.

i) If $\mu(g) < \infty$, then either μ belongs to $\mathfrak{I}_{0,c}$ or μ belongs to $\mathfrak{I}_{0,d}$;

ii) If $\mu \in \mathfrak{I}_{0,c}$, $\phi, \psi \in L^1(\mu)$ and $\mu(\phi) \neq 0$, then

$$\frac{\mu(\phi)}{\mu(\psi)} = \lim_{u\to\infty} \frac{\int_0^u P_t(\phi(x)dt}{\int_0^u P_t\psi(x)dt}$$

for μ-almost all x ,

iii) If $\mu \in \mathfrak{I}_{0,d}$, then there exists a probability measure P on the space E^∞ of all sequences $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$ in E such that if

$\phi,\psi \in L^1(\mu)$ and $\mu(\psi) \neq 0$, then

$$\frac{\mu(\phi)}{\mu(\psi)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^\infty P_t(x_k)dt}{\int_0^\infty P_t\psi(x_k)dt}$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^\infty P_t\phi(x_k)dt}{\int_0^\infty P_t\psi(x_k)dt} = 0$$

for P-almost all sequences $\{x_k\}$ and $s \in (0,\infty)$.

In order to use these results to study $\tilde{\mathfrak{I}}_{\lambda_\pi}$, we now reduce the general case to the case where $\lambda_\pi = 0$.

Let f be a λ_π-excessive function which is finite and trictly positive everywhere. Then we may define

$$\hat{P}_t(x,dy) = f(x)^{-1}P_t(x,dy)f(y) \tag{25}$$

It is easy to check that $\hat{P}_t(x,\cdot)$ is a sub-Markovian transition function.

Denote the set of all non-trivial invariant measures for $\{\hat{P}_t : t > 0\}$ by $\hat{\mathfrak{I}}_0$.

26. Theorem. $\tilde{\mathfrak{I}}_{\lambda_\pi} \neq \emptyset$ is equivalent to $\hat{\mathfrak{I}}_0 \neq \emptyset$. In detail, the corresponding between $\mu \in \mathfrak{I}_{\lambda_\pi}$ and $\nu \in \hat{\mathfrak{I}}_0$ is the following:

$$\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$$

Proof. If $\nu \in \hat{\mathfrak{I}}_0$ and $\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$, then

$$\int_B f(x)\mu(dx) = \nu(B) = \int \nu(dx)\hat{P}_t(x,B)$$

$$= \int \mu(dx) \int_B P_t^{\lambda_\pi}(x,dy) f(y)$$

$$= \int_B (\mu P_t^{\lambda_\pi})(dx) f(x) \quad \text{for each} \quad B \in \mathcal{B} \ .$$

Hence $\mu = \mu P_t^{\lambda_\pi}$, that is $\mu \in \tilde{\mathfrak{S}}_{\lambda_\pi}$. The converse can be proved similarly.

Since we have a complete answer to the problem "$\tilde{\mathfrak{S}}_{\lambda_\pi} \neq \emptyset$?" in case that $\{P_t^{\lambda_\pi} : t > 0\}$ is recurrent, it is important to construct a λ_π-excessive function only when $\{P_t^{\lambda_\pi} : t > 0\}$ is non-recurrent. We will assume slightly more than non-recurrence. Namely, we assume that

$$\int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi} \psi_0(x) dt < \infty \quad \text{for each} \quad x \in E \ . \tag{27}$$

In many cases (cf. [8]) , (27) is equivalent to non-recurrence.

28. Lemma. Under the condition (27) , the function f defined by

$$f(x) = \int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi} \psi_0(x) dt$$

is a λ_π-excessive, finite and positive everywhere function.

Proof. The positive property comes from (1.i) and (1.ii) . The λ_π-excessive property follows from

$$P_t^{\lambda_\pi} f(x) = \int_t^\infty P_s^{\lambda_\pi} \psi_0(x) ds \uparrow f(x) \quad \text{as} \quad t \downarrow 0 \ .$$

Sometimes it is convenient to use the following decomposition:

For a strictly positive function $g \in \mathcal{B}$, put

$$\hat{E}_c = \{x \in E : \int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi} g(x) dt = \infty\}$$

$$\hat{E}_d = \{x \in E : \int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi} g(x) dt < \infty\}$$

$$\hat{\mu}_c = \mu\big|_{\hat{E}_c} \ , \quad \hat{\mu}_d = \mu\big|_{\hat{E}_d} \ , \quad \mu \in \tilde{\mathfrak{S}}_{\lambda_\pi}$$

By [5; Theorem 3.2] , we have the following:

29. Theorem. If $\mu \in \tilde{\mathfrak{E}}_{\lambda_\pi}$, $\mu(g) < \infty$ and $\hat{\mu}_d = 0$, then $\mu \in \tilde{\mathfrak{I}}_{\lambda_\pi}$.

This is an improvement of (4). Indeed, for each $\mu \in \tilde{\mathfrak{E}}_{\lambda_\pi}$, we may choose a strictly positive function $g \in C(E)$ (for example, $g(x) \equiv \int_0^\infty P_t^\lambda \phi_0(x)dt$ $(\lambda > 0)$), such that $\mu(g) < \infty$. Suppose that $\{P_t^{\lambda_\pi} : t > 0\}$ is recurrent and $\mu(\hat{E}_d) \neq 0$, then there exists $0 < c_1 < c_2 < \infty$ and a compact subset K such that if

$$G \equiv \{x : c_1 \leq \int_0^\infty P_t^{\lambda_\pi} g(x)dt \leq c_2\} \cap K$$

then $0 < \mu(G) < \infty$. Put $\nu = \mu|_G$, then ν is a Radon measure and

$$\int_0^\infty \nu P_t^{\lambda_\pi} g dt \begin{cases} \geq c_1 \mu(G) > 0 \\ \leq c_2 \mu(K) < \infty \end{cases}.$$

For each $\phi \in C_0^+(E)$, we have

$$\int_0^\infty \nu P_t^{\lambda_\pi} \phi dt \leq \frac{\|\phi\|}{a} \int_0^\infty \nu P_t^{\lambda_\pi} g dt$$

$$\leq \frac{\|\phi\| c_2}{a} \mu(K) < \infty$$

where $a = \inf_{x \in \mathrm{supp}(\phi)} g(x) > 0$. Hence $\int_0^\infty \nu P_t^{\lambda_\pi} dt$ is a Radon measure. This is a contradiction.

In particular, we have

30. Corollary. If $P(t)$ is recurrent, then $\lambda_\pi = 0$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_0 \neq \emptyset$. In fact, for each $\mu \in \tilde{\mathfrak{E}}_0$, $\hat{\mu}_d = 0$.

§4. Markov Chains

We first discuss the discrete time case.

31. Theorem. Suppose that $P = (P_{ij})$ is an irreducible matrix on E and satisfies

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n < \infty$$

Define

$$ {}_HP_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} $$

$$ {}_HP_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1,\cdots,k_{n-1} \in H} P_{ik_1} P_{k_1k_2} \cdots P_{k_{n-1},j} \qquad (n \geq 1) $$

$$ L_{ki}(j) = \sum_{r=j}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} {}_iP_{kr}^{(n)} P_{ri} + P_{ki} $$

where $H \subset E$. Then the equation $\mu = \mu P$ has a positive solution if and only if there exists an infinite subset K of E such that

$$ \lim_{j\to\infty} \lim_{K \ni k\to\infty} L_{ki}(j)/L_{ki}(0) = 0 $$

Proof. This theorem was proved by Harris [7] and Veech [11] in the case that P is a strictly stochastic matrix. Their arguments are also available for us. We have need only to point out some changes.

Define

$$ Q = \sum_{n=1}^{\infty} P^n $$

$$ \phi_{ij} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} {}_iP_{ii}^{(n)} \Big)^{-1} $$

$$ \theta_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \{i,j\} P_{ij}^{(n)} \qquad (i \neq j) $$

Then, it is easy to see that $0 < \theta_{ij}, \phi_{ij} < \infty$ and that

$$ {}_HP_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell \notin H} {}_HP_{i\ell}^{(m)} \, {}_HP_{\ell j}^{(n-m)} \qquad (i,j \in E \ , \ 0 \leq m \leq n) $$

$$ {}_iP_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} \{i,j\} P_{ij}^{(m)} \, {}_iP_{jj}^{(n-m)} $$

$$ \theta_{ij} = \theta_{ij} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} {}_iP_{jj}^{(n)} \Big) \theta $$

$$ = \sum_{m=1}^{\infty} \{i,j\} P_{ij}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_iP_{jj}^{(n)} \phi_{ji} $$

$$ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \{i,j\} P_{ij}^{(m)} \, {}_iP_{jj}^{(n-m)} \phi_{ji} $$

$$= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} {}_i P_{ij}^{(n)}\Big)\phi_{ji} \ , \ i \neq j$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in \{k_1, \cdots, k_{n-1}\}} P_{kk_1} P_{k_1 k_2} \cdots P_{k_{n-1} j}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k_1 \cdots k_{m-1}} P_{kk_1} P_{k_1 k_2} \cdots P_{k_{m-1} i} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k_{m+1} \neq i, \cdots, k_{n-1} \neq i} P_{i k_{m+1}} \cdots P_{k_{n-1} j}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} P_{ki}^{(m)} \, {}_i P_{ij}^{(n-m)}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ki}^{(m)} \, {}_i P_{ij}^{(n)}$$

$$= Q_{ki} \sum_{n=1}^{\infty} {}_i P_{ij}^{(n)}$$

and

$$Q_{kj} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in \{k_1, \ldots, k_{n-1}\}} P_{kk_1} P_{k_1 k_2} \cdots P_{k_{n-1} j} + \sum_{n=1}^{\infty} {}_i P_{kj}^{(n)}$$

$$= Q_{ki} \sum_{n=1}^{\infty} {}_i P_{ij}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} {}_i P_{kj}^{(n)}$$

$$= Q_{ki} \, \theta_{ij}/\phi_{ji} + \sum_{n=1}^{\infty} {}_i P_{kj}^{(n)} \ , \ i \neq j$$

We now arrive at the same decomposition as in [7] :

$$\frac{Q_{ki}}{Q_{k0}} = \sum_{r=0}^{j-1} \frac{Q_{kr}}{Q_{k0}} P_{ri} + \frac{Q_{ki}}{Q_{k0}} \sum_{r=j}^{\infty} \Big(\frac{\theta_{ir}}{\phi_{ri}}\Big) P_{ri} + \frac{L_{ki}(j)}{Q_{k0}} \ .$$

We can now state the last result.

32. Theorem. Let $Q = (q_{ij})$ be a totally stable and irreducible Q-matrix, $P(t)$ a Q-process such that $P^{\lambda}{}^{\pi}(t)$ is non-recurrent. Define

$$f_i = \int_0^{\infty} P_{ij}^{\lambda}{}^{\pi}(t)dt < \infty$$

$$\hat{P}_{ij}(t) = f_i^{-1} P_{ij}^{\lambda}{}^{\pi}(t) f_j$$

$$\hat{P}_{ii} = 0 \quad , \quad \hat{P}_{ij} = f_i^{-1} q_{ij} f_j (\lambda_\pi + q_i)^{-1} \qquad (i \neq j)$$

then $\hat{P}_t$ is a Q-process with Q-matrix $\hat{Q} = (q_{ij})$:

$$\hat{q}_i = \lambda_\pi + q_i \quad , \quad \hat{q}_{ij} = f_i^{-1} q_{ij} f_j \qquad (i \neq j)$$

$\hat{P}(t)$ satisfies the forward Kolmogorov equations with $\hat{Q}$ if and only if $P(t)$ satisfies the forward Kolmogorov equations with Q . Finally, if $P(t)$ satisfies the equations, then, in order that $\tilde{\mathfrak{F}}_{\lambda_\pi} \neq \emptyset$ the following condition is necessary: there exists an infinite subset K of E such that

$$\lim_{j \to \infty} \lim_{k \ni k \to \infty} \hat{L}_{ki}(j) / \hat{L}_{ki}(0) = 0$$

where for fixed i and j , $\hat{L}_{ki}(j)$ is the minimal non-negative solution to

$$x_k = \sum_{\ell \neq i} \hat{P}_{k\ell} x_\ell + \sum_{r=j}^{\infty} \delta_{kr} \hat{P}_{ri} \quad , \quad k \in E$$

This can be obtained by the formula

$$\hat{L}_{ki}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k^{(n)}$$

where

$$x_k^{(1)} = \sum_{r=j}^{\infty} \delta_{kr} \hat{P}_{ri} \qquad , \quad k \in E$$

$$x_k^{(n+1)} = \sum_{\ell \neq i} \hat{P}_{k\ell} x_\ell^{(n)} \qquad , \quad n \geq 1 \ , \ k \in E$$

Proof. 1^0 . As mentioned in (8) , it is easy to check the first assertion.

2^0 . We now prove the second assertion.

$$\sum_k \hat{P}_{ik}(t) \hat{q}_{kj} = f_i^{-1} \sum_{k \neq j} P_{ik}^{\lambda_\pi}(t) q_{kj} f_j - f_i^{-1} e^{-\lambda_\pi t} P_{ij}(t) f_j \ \cdot$$

$$\cdot (\lambda_\pi + q_j)$$

$$= f_i^{-1} e^{\lambda_\pi t} f_j \Big(\sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - P_{ij}(t)(\lambda_\pi + q_j) \Big)$$

$$= f_i^{-1} e^{-\lambda_\pi t} f_j (P'_{ij}(t) - \lambda_\pi P_{ij}(t))$$

$$= \hat{P}^{!}_{ij}(t) \quad .$$

3^0 . By (26) , $\tilde{\mathfrak{I}}_{\lambda_\pi} \neq \emptyset \Leftrightarrow \hat{\mathfrak{I}}_0 \neq \emptyset$. Thus, if $\tilde{\mathfrak{I}}_{\lambda_\pi} \neq \emptyset$, then by (10) and (14) , there is a positive solution to $\nu = \nu\hat{P}$. Notice that $\hat{P}$ is transient, it is not hard to prove that the condition given here is equivalent to the one given in (31) .

References

[1] Chung, K.L. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag (1967).

[2] Derman, C. A solution to a set of fundamental equations in Markov chains, Proc. Amer. Math. Soc. 5, (1954), 332-334.

[3] Derman, C. Some contributions to the theory of denumerable Markov chains, Trans. Amer. Math. Soc. 39, (1955), 541-555.

[4] Dynkin, E.B. Integral representation of excessive measures and excessive functions, Uspehi Mat. Nauk 27 (163), (1972), 43-80.

[5] Dynkin, E.B. Minimal excessive measures and functions, Trans. Amer. Math. Soc. 258, (1980), 217-240.

[6] Fukushima, M. and Stroock D.W. Reversibility of solutions to martingale problems, to appear in Adv. Math.

[7] Harris, T.E. Transient Markov chains with stationary measures, Proc. Amer. Math. Soc. 8, (1957), 937-942.

[8] Miller, R.G. Stationary equations in continuous time Markov chains, Trans. Amer. Math. Soc. 109, (1963), 35-44.

[9] Stroock D.W. On the spectrum of Markov semigroups and the existence of invariant measures, Functional Analysis in Markov Processes, Proceedings. Edited by M. Fukushima Springer-Verlag, (1981), 287-307.

[10] Stroock D.W. and Varadhan S.R.S. Multidimensional Diffusion Processes. Springer-Verlag, (1979).

[11] Veech W. The necessity of Harris' condition for the existence of a statinary measure, Proc. Amer. Math. Soc. 14, (1863), 856-860.

附录二 优选法

研究目的是求出最优（试验）策略，使我们能以最少的试验次数找出单峰函数的最大值点. 所谓 $[0,1]$ 上的单峰函数 f，仍是存在最大值点 $c_f \in [0,1]$，使得 f 在 c_f 两旁严格单调. 判别一个策略 $\mathcal{P}$ 优劣的标准是"精度":

$$\delta_n(\mathcal{P}) = \sup_f |c_n(\mathcal{P}, f) - c_f|.$$

这里 $c_n(\mathcal{P}, f)$ 是 $\mathcal{P}$ 作用于 f，n 次试验后所得 n 个结果中的最大值点. 称 $\delta_n(\mathcal{P})$ 为 $\mathcal{P}$ 的 n 步精度.

对于给定的 $n \geq 1$，Kiefer (1953)[46] 证明了分数法 $\mathcal{F}_n$ 是最优的，它的精度是 $1/F_{n+1}$（$\{F_n\}$ 为 Fibonacci 数列）.

华罗庚教授指出了"预定试验次数"的弊病. 因为在实际中，我们并不能预先准确地知道要做多少次试验. 他对于对称策略类[47]（后来被加成[48],[49]对于一般的策略类）证明了黄金分割法 $\mathcal{W}$ 的"无穷远处最优性"，即 $\forall \mathcal{P}$，$\exists N \equiv N(\mathcal{P})$，使当 $n \geq N$ 时，$\delta_n(\mathcal{P}) \geq \delta_n(\mathcal{W})$.

笔者觉得，"无穷远处最优性"并不理想。因为它也是一种"预定次数"，只不过定在"无穷"。如同我们的预定次数条件下的最优策略是对于任何单峰函数而言的，要否定"预定次数"，自然应考虑对于任何单峰函数和任何试验次数而言的最优策略。我们在[5]中提出了新的精度概念：

$$\delta(\mathcal{P}) = \sup_{n\geq 1} \sup_{f} \left\{ \frac{\delta_n(\mathcal{P}) - \delta_n(\mathcal{F}_n)}{\delta_n(\mathcal{F}_n)} \right\}$$

$\{\cdots\}$的定义是：在第n步，策略$\mathcal{P}$的精度$\delta_n(\mathcal{P})$与最优策略$\mathcal{F}_n$的精度$\delta_n(\mathcal{F}_n)$的相对误差。我们也就对称策略类证明了W在新定义下的最优性。

上面所说的是每批安排一个试验点的情况。对于每批安排$2i$ ($i\geq 1$)个试点，我们也建立了相应的最优策略（虽然Ⓜ早已在实际中普遍应用，但尚未见过别人关于其最优性的任何讨论）。

在[6]中，我们讨论了另一种模型。模型的提出者[5]只就两种特殊情况给出了最优策略。而[6]给出了全部解答。

附录 2 论单因素优选问题的最优策略

贵阳师院学报(自然科学版), 1977:3, 117-134

論不定次(批)数条件下单因素优选問題的最优策略

数学系 陈木法

本文考慮了不定次(批)数条件下的最优性概念，并就某个基本的策略类，对两种特殊情况建立了最优策略。全文共分两部分。前一部分完成于73年9月；后一部分完成于75年6月。

第一部分 黃金分割法在不定次数条件下的最优性

§1. 引 言

众所周知，在預定 n 次试验的条件下，分数法 F_n* 是最优的。它可以达到最佳精度 $1/F_{n+1}$，然而，在实际应用中，往往不能准确地預先确定试验的次数。为了适用于一般的情况，需要否定“預定次数”这个限制条件。首先一种否定方法是建立“无穷远处”的最优策略[2]，使得在实际试验中，无需再考慮定次数的问题。可是，严格地说来，无穷远处的最优策略仍然是一种定次数的策略（只不过是定在无限次），它并没有回答它自身与任何有限次试验的最优策略的接近程度。另一方面，在有些情况下（例如每批偶数个试验点的情况），这种否定方法失败了，因为此时不存在无穷远处的最优策略。华罗庚同志早就指出了黃金分割法的最优性[1]。作者结合几年来推优的实践和体会，将各种可能的试验次数作为整体来考察，提出了在“不定次数”条件下的精度估计概念，并就某个基本的策略类证明了黃金分割法是在“不定次数”条件下的最优策略。

§2. 主要結果

关于单峰函数及试验策略的定义见〔2〕。本文约定试验的初始区间是〔0,1〕。

定义 1. 假定试验策略P作用于〔0,1〕上的单峰函数 f n 次试验后 n 个结果中的最大值点是 $C_n(\mathbf{P},f)$，则

$$\delta_n(\mathbf{P})=\sup_f|C_f-C_n(\mathbf{P},f)| \qquad (1)$$

---

* 文中的 F、W、P、Q、E、U 黑体字母应为花体字母，因印刷条件限制暫用黑体——编者。

称为P的 n 次试验精度。其中，C_f 是 f 在〔0,1〕上的峰值点。

否定“预定次数”的条件，就是要建立对于任何试验次数都能适用的最优策略。如果只要求“对任何试验次数都能适用”，则是垂手可得的。例如以0与1之间的任何无理数为第一个试验点，然后用对称规则安排新试验点，这样的试验策略便合乎要求。因此，还需要某种最优性概念。

显然，对于任何试验策略P，不可能对于每一个试验次数 n，$\delta_n(P)$都一致地达到最佳精度$\frac{1}{F_{n+1}}$；然而，自然要求它们的相对偏差

$$\frac{\delta_n(P)-\delta_n(F_n)}{\delta_n(F_n)}=F_{n+1}\delta_n(P)-1$$

一致地尽可能地小。这就引导我们以

$$\delta'(P)=\sup_n\left\{F_{n+1}\delta_n(P)-1\right\} \tag{2}$$

作为试验策略P在不定次数条件下的精度估计。而这等价于

定义 2.

$$\delta(P)=\sup_n\left\{F_{n+1}\delta_n(P)\right\} \tag{3}$$

称为试验策略 P 在不定次数条件下的精度。或称为 P 的精度。

记黄金割法为W. 本文的目的在于证明

定理 1.

$$\delta(W)=2\omega=\sqrt{5}-1; \tag{4}$$

对于任何对称策略Q

$$\delta(Q)\geqslant\delta(W). \tag{5}$$

定理1说明：在不定次数条件下，黄金分割法是对称策略类中的最优策略。

为了证明定理1，我们先作一些准备工作。

§3. F—数列的基本性质

所谓F—数列，即是

0，1，1，2，3，5，8，13，……。

它有

递推关系：$F_{-1}=0$，$F_0=1$，

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 1) \tag{6}$$

通项公式：$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \tag{7}$$

基本性质：$$F_nF_m-F_{n+1}F_{m-1}=(-1)^mF_{n-m}(n+1\geqslant m\geqslant 0) \tag{8}$$

$$F_{n-1}F_{m-1}+F_nF_m=F_{n+m}\quad(n\geqslant 0,\ m\geqslant 0) \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\omega \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\cdots<\frac{F_{2k-1}}{F_{2k}}<\cdots<\omega<\cdots<\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}<\cdots<\frac{2}{3}<1 \tag{11}$$

这些性质的证明都很简单，故从略。从(8)立即得出

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^{n-1} \tag{12}$$

$$F_nF_{n-1}-F_{n-2}F_{n+1}=(-1)^{n-1} \tag{13}$$

利用以上基本性质，可以证明

引理 1. 设 $k\geqslant 1$，则

$$\frac{F_{2k+2}}{F_{2k}}>4\omega, \tag{14}$$

$$\frac{3F_{2k+1}}{F_{2k}+F_{2k+2}}>2\omega, \tag{15}$$

$$\frac{F_{2k+1}F_{2k+3}}{F_{2k}F_{2k+3}+F_{2k-1}F_{2k+1}}>2\omega, \tag{16}$$

证，由(9)得

$$F_{2k+3}=F_3F_{2k-2}+F_4F_{2k-1}=3F_{2k-2}+5F_{2k-1},$$

$$F_{2k+1}=F_1F_{2k-2}+F_2F_{2k-1}=F_{2k-2}+2F_{2k-1},$$

从而

$$\frac{F_{2k+1}F_{2k+3}}{F_{2k}F_{2k+3}+F_{2k-1}F_{2k+1}}=\frac{3F_{2k-2}^2+11F_{2k-2}F_{2k-1}+10F_{2k-1}^2}{3F_{2k-2}^2+9F_{2k-2}F_{2k-1}+7F_{2k-1}^2}\geqslant\frac{24}{19}>2\omega$$

(16)式得证，余者类似可证。

引理 2. 当$k\geqslant 1$，$c\leqslant 2\omega$时*，

$$\frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}}-\frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}}>\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}-\frac{C}{F_{2k+1}F_{2k+2}} \tag{17}$$

$$\frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}}-\frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}}>\frac{F_{2k+1}+F_{2k-1}}{F_{2k+2}+F_{2k}} \tag{18}$$

$$\frac{F_{2k+3}}{F_{2k-1}}-\frac{CF_{2k}F_{2k+3}}{F_{2k-1}F_{2k+1}}>C \tag{19}$$

---

* 事实上，利用$\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+2}+F_{2k}}\geqslant\frac{2}{3}>\omega$容易证明(17)之右端大于(18)之右端。但我们并不需要这一不等式。

这三个不等式可分别从引理1中的三个不等式推出。例如，设(17)不真，则

$$\frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}}-\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}\leqslant\frac{C}{F_{2k+1}}\left(\frac{1}{F_{2k-1}}-\frac{1}{F_{2k+2}}\right)$$

即

$$\frac{F_{2k-2}F_{2k+1}-F_{2k-1}F_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}}\leqslant\frac{C}{F_{2k+1}}\cdot\frac{2F_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+2}}$$

由(8)，

$$(-1)^{2k}F_{2k-(2k-1)}\leqslant\frac{2CF_{2k}}{F_{2k+2}}$$

从而

$$\frac{F_{2k+2}}{F_{2k}}\leqslant 2C\leqslant 4\omega$$

这与(14)相悖，故(17)成立。

§4. 对称策略类及其精度計算

对任一试验策略 **P**，由规则 **P** 在〔0,1〕上确定第一个试验点 $x_1=x_1(\mathbf{P})$；然后根据 x_1 的位置及 $f(x_1)$ 之值由规则 **P** 确定第二个试验点 $x_2=\mathbf{P}(x_1,f(x_1))$ 无仿设 $x_1>x_2$（相反的情形可以类似地讨论）。此时，若 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$，则可去掉〔x_1,1〕，而在留下区间〔0,(x_2),x_1〕（(x_2)表示两次试验后的"最大值"点）安排第三次试验。反之，可去掉〔0,x_2〕，而在〔0,(x_2),x_1〕上安排第三次试验。我们称〔0,(x_1),x_1〕和〔x_2,(x_1),1〕为两次试验后的留下区间。类似地有 n 次试验后的留下区间。

我们知道，从构造规则来看，黄金分割法和分数法的区别仅仅在于第一个试验点。因为从第二点开始，都是按照对称规则来安排新试点的。这类策略叫做对称策略或基本策略。

考虑到在应用中，复杂的策略没有多大价值，为使研究得以简化，以后我们经常只限于对称策略 **Q**。今后，**Q** 总表示对称策略，它的第一个试验点 $x_1(\mathbf{Q})$ 和 n 次试验精度 $\delta_n(\mathbf{Q})$ 常简记为 x_1 和 δ_n。

引理 3. 对于 **Q**，它作用于任何 f，n 次试验后的留下区间〔a_n,(c_n),b_n〕具有一致的结构：

$$\delta_{n-1}=b_n-a_n,\quad \delta_n=max\left\{c_n-a_n,b_n-c_n\right\} \tag{20}$$

这个引理比较直观，不再细证。它告诉我们：对于对称策略，n 次试验后留下区间的构造一致。即留下区间的全长等于 δ_{n-1}；而被"好点"分成的两段中，长段的长度等于 δ_n。同时还告诉我们，为了求得 δ_{n+1}，只须在任一 n 次试验留下区间上安排第 $n+1$ 次试验，然后考虑第 $n+1$ 次试验后任一留下区间的结构便已足够。这为我们计算精度提供了很大方便。

引理 4. 对任一对称策略 **Q**，若

$$\frac{F_{2k-1}}{F_{2k}}<x_1<\frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}(k\geqslant 1) \tag{21}$$

则

$$\delta_h=(-1)^{h-1}F_{h-1}x_1+(-1)^{h-2}F_{h-2},\ 1\leqslant h\leqslant 2k \tag{22}$$

$$\delta_{2k+1}=F_{2k}-F_{2k+1}x_1 \tag{23}$$

证，对$1\leqslant h\leqslant 2k$用数学归納法证之。

当$h=1,2$时，因为$\frac{1}{2}\leqslant\frac{F_{2k-1}}{F_{2k}}<x_1<\frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}\leqslant\frac{2}{3}$，所以 $\delta_1=x_1$，$\delta_2=1-x_1$。(22)式显然成立。

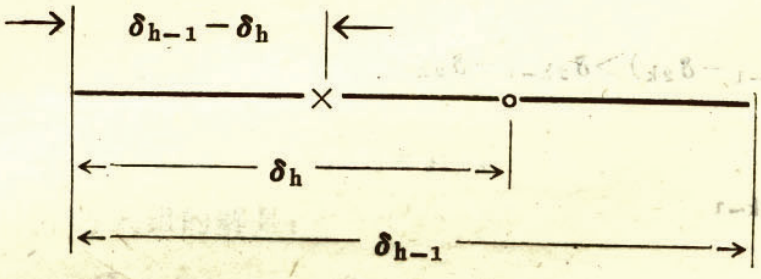
设对于$\leqslant h(2\leqslant h\leqslant 2k-1)$的情况已真。

则有

$$\delta_{h-1}=(-1)^{h-2}F_{h-2}x_1+(-1)^{h-3}F_{h-3},$$

$$\delta_h=(-1)^{h-1}F_{h-1}x_1+(-1)^{h-2}F_{h-2} \tag{24}$$

为求得δ_{h+1}，由引理 3，只须考虑任一h次试验后的留下区间。它具有如下构造



其中“×”是“o”的对称点，即第 $h+1$ 次试验点。我们证明

$$\delta_{h-1}-\delta_h>\delta_h-(\delta_{h-1}-\delta_h)$$

即

$$2\delta_{h-1}>3\delta_h \tag{25}$$

因为$h\leqslant 2k-1$，所以由(11)知

$$\begin{cases}x_1>\dfrac{F_{2k-1}}{F_{2k}}>\dfrac{F_{h+1}}{F_{h+2}}, & \text{当 } h \text{ 为偶数;}\\ x_1<\dfrac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}<\dfrac{F_{h+1}}{F_{h+2}}, & \text{当 } h \text{ 为奇数。}\end{cases}$$

从而对任何 h，有

$$(-1)^h x_1>(-1)^h\frac{F_{h+1}}{F_{h+2}}$$

由(9)，

$$F_{h+2}=F_3F_{h-1}+F_2F_{h-2},$$

$$F_{h+1}=F_3F_{h-2}+F_2F_{h-3},$$

故 $2[(-1)^{h-2}F_{h-2}x_1+(-1)^{h-3}F_{h-3}]>3[(-1)^{h-1}F_{h-1}x_1+(-1)^{h-2}F_{h-2}]$

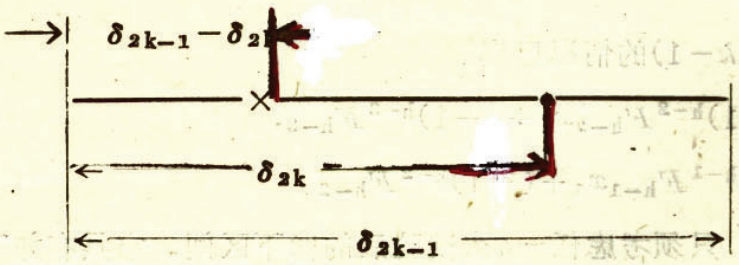
由 (24) 即得 (25)。

这样，由引理 3 和 (24) 得

$$\begin{aligned}\delta_{h+1}&=\delta_{h-1}-\delta_h\\&=(-1)^{h-2}F_{h-2}x_1+(-1)^{h-3}F_{h-3}-(-1)^{h-1}F_{h-1}x_1-\\&\quad-(-1)^{h-2}F_{h-2}\\&=(-1)^hF_hx_1+(-1)^{h-1}F_{h-1}\end{aligned}$$

至此，(22) 式得证。今往证明 (23)。

与上面一样，有



先证

$$\delta_{2k}-(\delta_{2k-1}-\delta_{2k})>\delta_{2k-1}-\delta_{2k}$$

倘若不然，则

$$3\delta_{2k}\leqslant 2\delta_{2k-1}$$

从而由(22)，

$$3F_{2k-2}-3F_{2k-1}x_1\leqslant 2F_{2k-2}x_1-2F_{2k-3},$$

即

$$x_1\geqslant\frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}$$

这与 (21) 相矛盾。于是，由引理 3 和 (22) 知

$$\begin{aligned}\delta_{2k+1}&=\delta_{2k}-(\delta_{2k-1}-\delta_{2k})\\&=2\delta_{2k}-\delta_{2k-1}\\&=2F_{2k-2}-2F_{2k-1}x_1-F_{2k-2}x_1+F_{2k-3}\\&=F_{2k}-F_{2k+1}x_1\end{aligned}$$

引理 4 证毕。

类似地，我们有

引理 5. 分数法$\mathbf{F}_m$的 n $(1\leqslant n\leqslant m)$次试验精度是

$$\delta_n(\mathbf{F}_m)=\frac{F_{m-n+1}}{F_{m+1}}\qquad(26)$$

而黄金分割法$\mathbf{W}$的 n 次试验精度是

$$\delta_n(\mathbf{W})=\omega^n\quad(n\geqslant 0)\qquad(27)$$

下面的引理对于定理 1 的证明具有基本的意义。

引理 6. 设 $C \leqslant 2\omega$，对于对称策略**Q**，我们有：

若
$$\frac{F_{2k-1}}{F_{2k}} < x_1 < \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}, \quad (k \geqslant 1) \tag{28}$$

则
$$max\left\{ F_{2k+1}\delta_{2k},\ F_{2k+2}\delta_{2k+1},\ F_{2k+3}\delta_{2k+2} \right\} > C \tag{29}$$

证，由引理 4

$$\delta_{2k} = F_{2k-2} - F_{2k-1}x_1,$$
$$\delta_{2k+1} = F_{2k} - F_{2k+1}x_1.$$

若 $F_{2k+1}\delta_{2k} > C$ 或 $F_{2k+2}\delta_{2k+1} > C$，则 (29) 已真。否则，我们证明必有

$$F_{2k+3}\delta_{2k+2} > C.$$

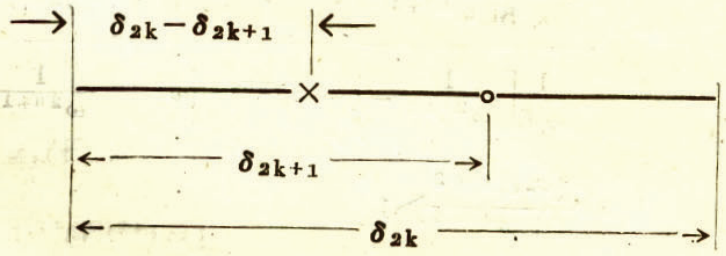
因若
$$\begin{cases} F_{2k+1}\delta_{2k} \leqslant C, \\ F_{2k+2}\delta_{2k+1} \leqslant C, \end{cases}$$

则
$$\begin{cases} x_1 \geqslant \dfrac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \dfrac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \\ x_1 \geqslant \dfrac{F_{2k}}{F_{2k+1}} - \dfrac{C}{F_{2k+1}F_{2k+3}} \end{cases}$$

由(17)知，这个不等式组的解是：

$$x_1 \geqslant \frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \tag{30}$$

此时，为计算δ_{2k+2}，考虑



首先有

$$\delta_{2k} - \delta_{2k+1} > \delta_{2k+1} - (\delta_{2k} - \delta_{2k+1})$$

否则，若 $3\delta_{2k+1} \geqslant 2\delta_{2k}$，则 $x_1 \leqslant \dfrac{F_{2k+1} + F_{2k-1}}{F_{2k+2} + F_{2k}}$

但由 (18) 和 (30)，

$$x_1 \leqslant \frac{F_{2k+1} + F_{2k-1}}{F_{2k+2} + F_{2k}} < \frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \leqslant x_1,$$

是为矛盾。于是由引理 3 和引理 4，

$$\delta_{2k+2}=\delta_{2k}-\delta_{2k+1}$$
$$=F_{2k}x_1-F_{2k-1}$$

由(30),

$$\delta_{2k+2}\geqslant\frac{F_{2k}F_{2k-2}}{F_{2k-1}}-\frac{CF_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}}-F_{2k-1}$$
$$=\frac{F_{2k}\cdot F_{2k-2}-F_{2k-1}^2}{F_{2k-1}}-\frac{CF_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}}$$
$$=\frac{1}{F_{2k-1}}-\frac{CF_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}}$$

考虑到(19), 便知

$$F_{2k+3}\delta_{2k+2}\geqslant\frac{F_{2k+3}}{F_{2k-1}}-\frac{CF_{2k}F_{2k+3}}{F_{2k-1}F_{2k+1}}>C$$

引理 6 得证。

§5. 定理1的证明

由引理 5, 对任意的$n\geqslant 1$,

$$\frac{F_{2n}\delta_{2n-1}(W)}{F_{2n+1}\delta_{2n}(W)}=\frac{F_{2n}\omega^{2n-1}}{F_{2n+1}\omega^{2n}}=\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}\omega}>1;$$

$$\frac{F_{2n}\delta_{2n-1}(W)}{F_{2n+2}\delta_{2n+1}(W)}=\frac{F_{2n}\omega^{2n-1}}{F_{2n+2}\omega^{2n+1}}=\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}\omega^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\omega^{2n+1}}-(-\omega)^{2n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\omega^{2n+3}}-(-\omega)^{2n+3}\right]\omega^2}=\frac{\frac{1}{\omega^{2n+1}}+\omega^{2n+1}}{\frac{1}{\omega^{2n+1}}+\omega^{2n+5}}$$
$$=\frac{1+\omega^{4n+2}}{1+\omega^{4n+6}}>1$$

由此可见

$$\delta(W)=\sup_n\left\{F_{n+1}\delta_n(W)\right\}=F_2\delta_1(W)=2\omega$$

(4)式得证。

对任一对称策略 Q, 如果 $x_1(Q)\geqslant\omega$, 则

$$\delta(Q)=\sup_n\left\{F_{n+1}\delta_n(Q)\right\}\geqslant F_2\delta_1(Q)\geqslant 2\omega$$

(5)式成立。今设 $x_1(Q)<\omega$, 因为试验次数 n 任意, $x_1(Q)\neq\frac{F_n}{F_{n+1}}$, 由对称性, 无妨设 $x_1(Q)>\frac{1}{2}$, 由于 $n\longrightarrow\infty$ 时,

$$\frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}} \uparrow \omega,$$

故必存在一个 k，使得

$$\frac{F_{2k-1}}{F_{2k}} < x_1(Q) < \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}$$

于是由引理 6，

$$\delta(Q) = \sup_n \left\{ F_{n+1}\delta_n(Q) \right\}$$

$$\geqslant \max_{2k \leqslant n \leqslant 2k+2} \{ F_{n+1}\delta_n(Q) \} > 2\omega = \delta(W)$$

定理证毕

§6. 試驗次数不超过m的最优策略

如果我们排除试验次数超过 m（给定的正整数）的可能性，那么，需要建立试验次数不超过 m（即可能是 1，2，…，m 次，但具体次数不能预先确定）的最优策略。相应的精度估计是：

定义 3. 对任一试验策略 P，

$$\delta^{(m)}(P) = \max_{1 \leqslant n \leqslant m} \{ F_{n+1}\delta_n(P) \} \tag{31}$$

称为 P 在不超过 m 次试验的精度。

在上面所证明的引理中，将 C 换作 $2F_{2l+1}/F_{2l+2}$，相应的结果均成立，从而不难证明下列的

定理 2，在基本策略类中，试验次数不超过 m 的最优策略是 $F^{(m)}$。

$$x_1(F^{(1)}) = \frac{1}{2} \tag{32}$$

$$x_1(F^{(2l)}) = x_1(F^{(2l+1)}) = \frac{F_{2l+1}}{F_{2l+2}} \quad (l \geqslant 1) \tag{33}$$

$$\delta^{(1)}(F^{(1)}) = 1 \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2l)}(F^{(2l)}) &= \delta^{(2l)}(F^{(2l+1)}) \\ &= \delta^{(2l+1)}(F^{(2l+1)}) \\ &= 2F_{2l+1}/F_{2l+2} \end{aligned} \tag{35}$$

§7. 結 束 語

黄金分割法否定了“预定试验次数”的限制条件，在新的基础上达到了最优。它比分数法前进了一步，更具有普遍性。这就说明为什么在推广普及中，应当把它放在比较突出的位置。

第二部分：U 在不定批数条件下的最优性

§1. 引　言

先将第一部分中的概念推广到每批多个试点的情况。

仍假定试验的初始区间是〔0，1〕。f 恒指〔0，1〕上的单峰函数。假如一个试验策略**P**作用于 f，n 批——$(K_1, K_2, \cdots, K_n)$ 试验之后，最大值点是 $C_n(\mathbf{P}, f)$。而 f 在〔0，1〕上的峰值点是 C_f。

定　义 1.

$$\delta_n(\mathbf{P})=\sup_f |C_f-C_n(\mathbf{P}, f)| \tag{1}$$

称为 **P** 的 n 步精度。

定　义 2. 如果对于任一试验策略 **Q**，

$$\delta_n(\mathbf{P}) \leqslant \delta_n(\mathbf{Q}) \tag{2}$$

则称 **P** 是在限定 n 批条件下的最优策略。

对于每批 $2i$ $(i \geqslant 1)$ 个试验点的情况，早已建立了在 (2) 意义下预定 n 批试验的最优策略 $\mathbf{E}_n^{(i)}$，它的精度是

$$\delta_n(\mathbf{E}_n^{(i)})=(E_n^{(i)})^{-1}=(2(i+1)^n-1)^{-1} \tag{3}$$

应当指出，对于不同的 i 和 n，$\mathbf{E}_n^{(i)}$ 是不同的策略。但若不致发生混淆，我们将一律记作 **E**.

在实际应用中，往往不能准确地“预定试验批数”。因此，应当否定这个限制条件。那么，能不能通过令 $n \longrightarrow \infty$，从 $\mathbf{E}_n^{(i)}$ 来求得无穷远处的最优策略呢？請看：

$\mathbf{E}_n^{(i)}$ 的头两个试点是 $\dfrac{2(i+1)^{n-1}-1}{2(i+1)^n-1}$ 和 $\dfrac{2(i+1)^{n-1}}{2(i+1)^n-1}$。

当 $n \longrightarrow \infty$ 时，这两点都趋于 $\dfrac{1}{i+1}$。这样，当 $n \longrightarrow \infty$ 时，$\mathbf{E}_n^{(i)}$ 的第一批 $2i$ 个试点两重合，变成只有 i 个试点。因此，这个方法完全失败了。在这一部分里，我们继续前一部分的想法，考察在更一般意义下（即在不定批数条件下）的最优策略，得到了满意的结果。

以下所说的试验策略，均指每批 $2i$ 个试点的策略。

定　义 3.

$$\delta^{(m)}(\mathbf{P})=\max_{1 \leqslant n \leqslant m} E_n^{(i)} \delta_n(\mathbf{P}) \tag{4}$$

称为策略 P 在不超过 m 批试验条件下的精度。

定 义 4. 如果对于任何的试验策略 Q，

$$\delta^{(m)}(\mathbf{P}) \leqslant \delta^{(m)}(\mathbf{Q}) \tag{5}$$

则称 P 是在不超过 m 批条件下的最优策略。

定 义 5.

$$\delta(\mathbf{P}) = \sup_{n} \{E_n^{(i)} \delta_n(\mathbf{P})\} = \lim_{m\to\infty} \delta^{(m)}(\mathbf{P}) \tag{6}$$

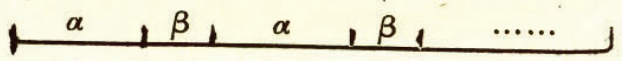
称为 P 在不定批数条件下的精度，简称为 P 的精度。

定 义 6. 如果对于任何的试验策略 Q，

$$\delta(\mathbf{P}) \leqslant \delta(\mathbf{Q}) \tag{7}$$

则称 P 是在不定批数条件下的最优策略。

我们已经知道，所有的(預定批数或无穷远处的)最优策略都有统一的构造规则[2]：在第 n 批试验时，把试验点分配得使上批试验后的留下区间（也称剩余区间）恰好被分成长、短相间的諸段。即



$\alpha \geqslant \beta$,

或



$\alpha < \beta$,

其中有一点是上次试验后留下的好点。我们把按照上述规则构造出来的策略称为基本策略。因为在应用中，构造复杂的策略没有多大意义，故我们只研究基本策略。我们的目的，是从基本策略类中找出 (7) 意义下的最优策略。

定 义 7. U 是这样一个每批 $2i$ ($i \geqslant 1$) 个试点的试验策略：它在第一批试验时，$2i$ 个试点将 [0, 1] 分成 $2i+1$ 等分；而在第 n ($\geqslant 2$) 批试验时，它的 $2i$ 个试点连同上批试验后留下的好点将剩余区间分成 $2i+2$ 等分。

U 早已在实践中得到广泛应用。但作者至今未见过关于它的最优性意义的任何讨论。本文指出它的最优性的意义，并就基本策略类证明了它的最优性。

§2. 若干引理

引 理 1. 我们有

$$E_n \triangleq E_n^{(i)} = 2(i+1)^n - 1. \tag{8}$$

$$\delta_n(\mathbf{E}) = E_n^{-1} \tag{9}$$

$$\delta_n(\mathbf{U}) = 1/(2i+1)(i+1)^{n-1} \tag{10}$$

$$\delta^{(m)}(\mathbf{U}) = \max_{1\leqslant n\leqslant m} E_n \delta_n(\mathbf{U}) = E_m \delta_m(\mathbf{U}) \tag{11}$$

$$= [2(i+1)^m - 1]/(2i+1)(i+1)^{m-1} \tag{12}$$

$$\delta(\mathbf{U})=\lim_{m\to\infty}\delta^{(m)}(\mathbf{U})=2(i+1)/(2i+1). \tag{13}$$

证：为证(11)，只须证明

$$E_n\,\delta_n(\mathbf{U})<E_{n+1}\,\delta_{n+1}(\mathbf{U}). \tag{14}$$

事实上，若(14)不真，则

$$\frac{2(i+1)^n-1}{2(i+1)^{n+1}-1}=\frac{E_n}{E_{n+1}}\geqslant\frac{\delta_{n+1}(\mathbf{U})}{\delta_n(\mathbf{U})}=\frac{(2i+1)(i+1)^{n-1}}{(2i+1)(i+1)^n},$$

即 $2(i+1)^{n+1}-(i+1)\geqslant 2(i+1)^{n+1}-1$,

这是不可能的。(14)得证，从而(11)成立。其余各式显然成立。

今设 $\mathbf{P}$ 是每批 $2i$ 个试点的任一试验策略。不失一般性，可设它的第一批试点是：

$$\{\alpha_1,\ \alpha_1+\beta_1,\ 2\alpha_1+\beta_1,\ 2\alpha_1+2\beta_1,\ \cdots,\ i\alpha_1+i\beta_1\}; \tag{15}$$

第 $n(\geqslant 2)$ 批试点是：

$$\{\alpha_n,\ \alpha_n+\beta_n,\ 2\alpha_n+\beta_n,\ 2\alpha_n+2\beta_n,\ \cdots,\ (i+1)\alpha_n+i\beta_n\}. \tag{16}$$

其中有一试点是前 $n-1$ 批的试点，即已试点。于是有

引 理 2.

$$\delta_n(\mathbf{P})=max(\alpha_n,\ \beta_n). \tag{17}$$

$$\alpha_n+\beta_n=(1-\alpha_1)/i(i+1)^{n-1}. \tag{18}$$

引 理 3. 如果

$$\alpha_1\in\left\{\alpha_2,\ \alpha_2+\beta_2\cdots,\ \left[\frac{i}{2}\right](\alpha_2+\beta_2)\right\}. \tag{19}$$

那么

$$\delta^{(2)}(\mathbf{P})>\delta(\mathbf{U}). \tag{20}$$

证、假设(20)不真. 由(19)，

$$\alpha_1\leqslant\left[\frac{i}{2}\right](\alpha_2+\beta_2)=\left[\frac{i}{2}\right]\frac{1-\alpha_1}{i(i+1)}\left(\text{由}(18)\right).$$

从而

$$\alpha_1\leqslant\left[\frac{i}{2}\right]\Big/\left(i(i+1)+\left[\frac{i}{2}\right]\right)$$

$$\leqslant 1\Big/\left(1+\frac{i(i+1)}{\frac{i}{2}}\right)$$

$$<\frac{1}{2(i+1)}<\frac{1}{2(i+1)}+\frac{1}{2(i+1)(2i+1)^2} \tag{21}$$

但由(17)、(18)和假设，

$$\frac{1-\alpha_1}{i}-\alpha_1=\beta_1\leqslant max\{\alpha_1,\beta_1\}=\delta_1(P)\leqslant E_1^{-1}\delta^{(2)}(P)\leqslant$$

$$\leqslant E_1^{-1}\delta(U)=\frac{2(i+1)}{(2i+1)^2},$$

从而

$$\alpha_1\geqslant\frac{1}{2(i+1)}+\frac{1}{2(i+1)(2i+1)^2}. \tag{22}$$

由(21)和(22)引出矛盾，因而引理3得证。

引 理 4. 如果

$$\alpha_1=\left[\frac{i}{2}\right](\alpha_2+\beta_2)+\left(\left[\frac{i+1}{2}\right]-\left[\frac{i}{2}\right]\right)\alpha_2 \tag{23}$$

那么(20)也成立。

证，当$i=2j$时，由引理3可推出引理4，故只需就$i=2j-1$的情形证明引理4成立，此时

$$\alpha_1=(j-1)(\alpha_2+\beta_2)+\alpha_2$$
$$=(j-1)(1-\alpha_1)/2j(2j-1)+\alpha_2.$$

即
$$\alpha_2=\alpha_1-(j-1)(1-\alpha_2)/2j(2j-1)$$
$$=((4j^2-j-1)\alpha_1-(j-1))/2j(2j-1). \tag{24}$$

如若(20)不真，那么

$$\alpha_2\leqslant max(\alpha_2,\beta_2)=\delta_2(P)\leqslant E_2^{-1}\delta^{(2)}(P)\leqslant E_2^{-1}\delta(U)=$$
$$=4j/(4j-1)(8j^2-1). \tag{25}$$

由(24)和(25)得

$$\alpha_1\leqslant\frac{j-1}{4j^2-j-1}+\frac{8j^2(2j-1)}{(4j-1)(4j^2-j-1)(8j^2-1)}=$$

$$=\frac{2j-1}{2(4j^2-j-1)}-\frac{8j^2-4j+1}{(4j-1)(4j^2-j-1)(8j^2-1)}<\frac{2j-1}{2(4j^2-j-1)}<$$

$$<\frac{1}{4j}+\frac{1}{4j(4j-1)^2} \tag{26}$$

并且，若(20)不真，(22)也应成立，即

$$\alpha_1\geqslant\frac{1}{4j}+\frac{1}{4j(4j-1)^2} \tag{27}$$

(26)与(27)相悖，证明遂告完成。

引 理 5. 如果

$$\alpha_1 \in \left\{\left[\frac{i+3}{2}\right](\alpha_2+\beta_2),\ \cdots,\ i\alpha_2+i\beta_2,\ (i+1)\alpha_2+i\beta_2\right\} \tag{28}$$

那么(20)成立。

证、倘若不然，由(28)，当 $i \geqslant 2$ 时，

$$\alpha_1 \geqslant \left[\frac{i+3}{2}\right] \Big/ \left(i(i+1)+\left[\frac{i+3}{2}\right]\right)$$

$$= 1 \Big/ \left(1+\frac{i(i+1)}{\left[\frac{i+3}{2}\right]}\right) \geqslant 1 \Big/ \left(1+\frac{i(i+1)}{\frac{i+2}{2}}\right) = \frac{i+2}{2i^2+3i+2} >$$

$$> \frac{1}{2i+1}+\frac{1}{(2i+1)^2} = E_1^{-1}\delta(\mathbf{U}) \geqslant E_1^{-1}\delta^{(2)}(\mathbf{P}) \geqslant \delta_1(\mathbf{P}) =$$

$$= max(\alpha_1,\ \beta_1) \geqslant \alpha_1 .$$

是为矛盾。当 $i=1$ 时，$\alpha_1 \geqslant \left[\frac{1+3}{2}\right] \Big/ \left(1\times(1+1)+\left[\frac{1+3}{2}\right]\right) > \frac{4}{9} = E_1^{-1}\delta(\mathbf{U}) \geqslant$

$\geqslant \alpha_1$，同样导致矛盾。

引 理 6. 如果 $i \geqslant 2$，

$$\alpha_1 = \left[\frac{i+3}{2}\right]\alpha_2+\left[\frac{i+2}{2}\right]\beta_2 \tag{29}$$

则(20)成立。

证：当 $i=2j$ 时，由引理5可推出引理6。故只有 $i=2j-1$ 的情形待证。由(29)

$$\alpha_1 = (j+1)\alpha_2+j\beta_2 = (j+1)(\alpha_2+\beta_2)-\beta_2 = \frac{(j+1)(1-\alpha_1)}{2j(2j-1)}-\beta_2$$

即

$$\beta_2 = \frac{(j+1)-(4j^2-j+1)\alpha_1}{2j(2j-1)} . \tag{30}$$

如若(20)不真，则

$$\beta_2 \leqslant max(\alpha_2,\ \beta_2) \leqslant E_2^{-1}\delta^{(2)}(\mathbf{P}) \leqslant E_2^{-1}\delta(\mathbf{U}) =$$

$$= 4j/(4j-1)(8j^2-1) . \tag{31}$$

从而

$$\frac{(j+1)-(4j^2-j+1)\alpha_1}{2j(2j-1)} \leqslant \frac{4j}{(4j-1)(8j^2-1)},$$

即

$$\alpha_1 \geqslant \frac{32j^4+8j^3-4j^2-3j+1}{(4j-1)(8j^2-1)(4j^2-j+1)} = \frac{1}{4j-1}+$$

$$+\frac{2(8j^3-4j^2-2j+1)}{(4j-1)(4j^2-j+1)(8j^2-1)}>\frac{1}{4j-1}+$$

$$+\frac{2j+1}{2(4j-1)(4j^2-j+1)}>\frac{1}{4j-1}+\frac{1}{(4j-1)^2}. \qquad (32)$$

但与引理 5 一样，应有

$$\alpha_1 \leqslant max(\alpha_1, \beta_1) \leqslant E_1^{-1}\delta(\mathbf{U})=\frac{1}{4j-1}+\frac{1}{(4j-1)^2}.$$

可见引理 6 必定成立。

引 理 7. 当 $n \geqslant 2$ 时，如果

$$\alpha_k=\beta_k=1/(2i+1)(i+1)^{k-1},\ (1 \leqslant k \leqslant n-1). \qquad (33)$$

并且

$$\delta^{(n+1)}(\mathbf{P}) \leqslant \delta(\mathbf{U}), \qquad (34)$$

则

$$\alpha_n \notin \{\alpha_{n+1},\ \alpha_{n+1}+\beta_{n+1},\ \cdots,\ \left[\frac{i}{2}\right](\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})\}. \qquad (35)$$

证、若 (35) 不成立，则

$$\alpha_n \leqslant \left[\frac{i}{2}\right](\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})=\left[\frac{i}{2}\right]\frac{1-\alpha_1}{i(i+1)^n}=\left[\frac{i}{2}\right]\frac{1-1/(2i+1)}{i(i+1)^n}=$$

$$=2\left[\frac{i}{2}\right]\Big/(2i+1)(i+1)^n \leqslant 2\times\frac{i}{2}\Big/(2i+1)(i+1)^n <$$

$$<1/(2i+1)(i+1)^{n-1}-1/(2i+1)(i+1)^{n-1}(2(i+1)^n-1). \qquad (36)$$

另一方面，由 (34) 知

$$2/(2i+1)(i+1)^{n-1}-\alpha_n=\beta_n \leqslant max\{\alpha_n, \beta_n\}=\delta_n(\mathbf{P}) \leqslant E_n^{-1}\delta^{(n)}(\mathbf{P}) \leqslant$$

$$\leqslant E_n^{-1}\delta^{(n+1)}(\mathbf{P})<E_n^{-1}\delta(\mathbf{U})=2(i+1)/(2i+1)(2(i+1)^n-1). \qquad (37)$$

从而

$$\alpha_n \geqslant 2/(2i+1)(i+1)^{n-1}-2(i+1)/(2i+1)(2(i+1)^n-1)$$

$$=1/(2i+1)(i+1)^{n-1}-1/(2i+1)(i+1)^{n-1}(2(i+1)^n-1). \qquad (38)$$

(38) 矛盾于 (36)，故引理成立。

引 理 8. 在引理 7 的条件下，

$$\alpha_n \neq \left[\frac{i+1}{2}\right]\alpha_{n+1}+\left[\frac{i}{2}\right]\beta_{n+1}. \qquad (39)$$

证、当 $i=2j$ 时，(35) 推出 (39)。因此，只待 $i=2j-1$ 的情形需要验证。此时，如若 (39) 不真，那么

$$\alpha_n = j\alpha_{n+1} + (j-1)\beta_{n+1}.$$

这样，由 (34)

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - (j-1)(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}) = \alpha_n - 2(j-1)/(4j-1)(2j)^n \leqslant$$

$$\leqslant max\{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\} \leqslant E_{n+1}^{-1}\delta(\mathbf{U}) = 4j/(4j-1)(2(2j)^{n+1}-1).$$

从而

$$\alpha_n \leqslant 4j/(4j-1)(2(2j)^{n+1}-1) + 2(j-1)/(4j-1)(2j)^n$$

$$< 1/(4j-1)(2j)^{n-1} - 1/(4j-1)(2j)^{n-1}(2(2j)^n - 1). \qquad (40)$$

但 (40) 与 (38) 矛盾，故引理 8 得证。

引 理 9. 在引理 7 的条件下，

$$\alpha_n \notin \left\{\left[\frac{i+3}{2}\right](\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}), \cdots, i\alpha_{n+1}+i\beta_{n+1},\right.$$

$$\left.(i+1)\alpha_{n+1}+i\beta_{n+1}\right\}. \qquad (41)$$

证、如果 (41) 不真，则可推出

$$\beta_n \leqslant \left[\frac{i}{2}\right](\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}). \qquad (42)$$

在引理 7 的证明中，将 α_n 换作 β_n，立知本引理成立。

引 理 10. 在引理 7 的条件下

$$\alpha_n \neq \left[\frac{i+3}{2}\right]\alpha_{n+1} + \left[\frac{i+2}{2}\right]\beta_{n+1}. \qquad (43)$$

证、只须对 $i=2j-1$ 证明 (43) 式。反之，若

$$\alpha_n = (j+1)\alpha_{n+1} + j\beta_{n+1},$$

那么

$$\beta_n = (j-1)\alpha_{n+1} + j\beta_{n+1}.$$

于是，可以得到 α_n 换作 β_n 的 (40) 式。另一方面，将 (37) 中的 α_n 与 β_n 互换，又可得出 α_n 换作 β_n 的 (38) 式。这两个矛盾不等式说明本引理成立。

§3. 最 优 性 証 明

定 理 1. 一切每批 $2i$ ($i \geqslant 2$) 个试点的基本策略中，**U** 是最优的。

证. 只需证明，对任何的每批 $2i(i \geqslant 2)$ 个试点的基本策略 **P**，若 **P** 不同于 **U**，则

$$\delta(\mathbf{P}) > \delta(\mathbf{U}). \qquad (44)$$

假定最先使 **P** 不同于 **U** 的批数为 n。如果 $n=1$，由于 **P** 不同于 **U**，则必有

$$\alpha_1 \neq \left[\frac{i+2}{2}\right]\alpha_2 + \left[\frac{i+1}{2}\right]\beta_2,$$

即

$$\alpha_1 \in \left\{\alpha_2,\ \alpha_2+\beta_2,\ \cdots,\ \left[\frac{i+1}{2}\right]\alpha_2+\left[\frac{i}{2}\right]\beta_2\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\left[\frac{i+3}{2}\right]\alpha_2+\left[\frac{i+2}{2}\right]\beta_2,\ \cdots,\ (i+1)\alpha_2+i\beta_2\right\}.$$

但由引理 3 ～引理 6，此时将有

$$\delta(\mathbf{P}) \geqslant \delta^{(2)}(\mathbf{P}) > \delta(\mathbf{U}).$$

因而 (44) 已真。

如果 $n>1$，那么依照对于 n 的假定，当 $k \leqslant n-1$ 时，P 与 U 相同，而在第 n 批 P 不同于 U。于是条件 (33) 满足，而且

$$\alpha_n \neq \left[\frac{i+2}{2}\right]\alpha_{n+1}+\left[\frac{i+1}{2}\right]\beta_{n+1},$$

即

$$\alpha_n \in \left\{\alpha_{n+1},\ \alpha_{n+1}+\beta_{n+1},\ \cdots,\ \left[\frac{i+1}{2}\right]\alpha_{n+1}+\left[\frac{i}{2}\right]\beta_{n+1}\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\left[\frac{i+3}{2}\right]\alpha_{n+1}+\left[\frac{i+2}{2}\right]\beta_{n+1},\ \cdots,\ (i+1)\alpha_{n+1}+i\beta_{n+1}\right\}.$$

因而由引理 7 ～引理 10，

$$\delta(\mathbf{P}) \geqslant \delta^{(n+1)}(\mathbf{P}) > \delta(\mathbf{U}),$$

(44) 也真。证明遂告完成。

应用完全同样的方法，可以证明

定 理 2. 在一切每批 $2i$ ($i \geqslant 2$)个试点的基本策略中，U 是不超过 n 批试验条件下的最优策略。

对于 $i=1$ 的情况，特殊了一些。容易证明

定 理 3. 在一切每批 2 个试点的基本策略中，U 是不超过三批试验条件下的最优策略。

现在，我们定义试验策略 U′，它是每批 2 个试点的试验策略：第一批试点取为 $\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$；从第二批开始，都将剩余区间四等分，在两个未试验过的等分点上按排新的一批试验。

此时，U 的精度为 4/3，U′的精度为 9/7(在第一步达到)

定 理 4. 在一切每批 2 个试点的基本策略中，U′ 是最优的。

从定理 3 和定理 4 可以看出，即使对于 $i=1$ 的情况，U 仍然是有意义的。因为它与 U′ 差别不大。

自然会提出这样一个问题：能否对任何试验策略来证明 U 的最优性呢？我们可以构造一个试验策略（不是基本策略），它比 U′ 更好些。因此，这个猜测是不对的。但如同前面所说的，那些构造繁杂的试验策略，在实际应用中并没有多大价值。

有时，人们用基本策略所能处理的等分数来比较策略的优劣。即所处理的等分数愈

多者愈好。在这里，$E_n^{(i)}$ 所能处理的最多等分数是 $E_n=2(i+1)^n-1$；而 U 所能处理的最多等分数是 $(2i+1)(i+1)^{n-1}$。当 $n\to\infty$ 时，两者之差为 $((i+1)^n-1)\uparrow\infty$。即用 $E_n^{(i)}$ 所能处理的等分数比之用 U 多得多。这似乎意味着，随着 n 的增大，相对于 $E_n^{(i)}$ 而言，U 就越不好。然而，这只是一种误解。实际上，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_n(E)}{\delta(U)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2i+1)(i+1)^{n-1}}{2(i+1)^n-1}=\frac{2i+1}{2i+2}.$$

换句话说，$E_n^{(i)}$ 和 U 的精度是属同一数量级的，相差不大。更为重要的是，如果顾及到试验的可分辨性，则 U 比 $E_n^{(i)}$ 有更大的优越性。

志　謝：本文写作中承北京师大严士健老师、王世强老师和长沙铁道学院候振挺老师的指导和鼓励，我院数学系的许多同志也给予热情的支持和帮助，在此衷心感谢！

参　考　文　献

[1]. 华罗庚.《优选法平话及其补充》. 国防工业出版社. 1970年5月。

[2]. 洪加威. 论批数不限定情况下一维优选问题的最优策略.《中国科学》. 2.(1974).

第二文定理1证明的补充

陈木法
(北京师大数学系)
(1990 年)

依照最优策略 $\mathscr{U}$ 的构造，它的 $2i$ 个试点连同上批试验后留下的好点将剩余区间分成 $2i+1$ 个等分。这意味着

(A) 在第 $n+1$ 步，包含第 n 批留下的已试点在内的 $2i+1$ 个试点中，已试点处于排序的中间位置，即为第 $i+1$ 个试点，满足

$$\alpha_n = \left[\frac{i+2}{2}\right]\alpha_{n+1} + \left[\frac{i+1}{2}\right]\beta_{n+1}. \qquad (*)$$

同时,

(B) 已试点位于剩余区间的中心.

原证中仅考虑了不满足 $(*)$ 的策略 $\mathscr{P}$ 而忽视了满足 $(*)\,(\forall n \geqslant 1)$ 但不满足 (B) 的策略. 这里予以补证.

(1) 首先注意，当 i 为奇数时，条件 (A) 对一切 $n \geqslant 1$ 成立推出条件 (B). 例如设 $i = 2j-1$. 那么上批留下的好点连同这批的 $2i$ 个试点将区间分成长、短相间的 $4j$ 段，上批的好点排序居中，它的两边各有 $2j$ 段 (长、短段各半), 故好点必定处于试验区间的中点.

由此可以看出：当 $i = 2j$ 为偶数时，满足 $(*)\,(\forall n \geqslant 1)$ 的策略未必满足 (B). 因为此时好点两边各有 $2j+1$ 段，例如说左方多出一长的，则右方就多出一短的，因而好点两边的长度不相等，当然好点就不处于剩余区间的中点.

(2) 今设 $i = 2j$, 策略 $\mathscr{P} \neq \mathscr{U}$ 且 $(*)$ 对一切 $n \geqslant 1$ 成立. 若 $\alpha_1 = \beta_1$, 则由 $(*)$ 将可推出 $\alpha_n = \beta_n$ 对一切 $n \geqslant 1$ 成立而与 $\mathscr{P} \neq \mathscr{U}$ 矛盾. 先设 $\alpha_1 > \beta_1$. 则 $\delta_1 = \max\{\alpha_1, \beta_1\} = \alpha_1$. 由 $i = 2j$ 及 $(*)$ 知, 此时必定有 $\alpha_2 > \beta_2$. 因而 $\delta_2 = \alpha_2$. 重复此项手续得出 $\delta_n = \alpha_n$, $n \geqslant 1$. 由此及 $(*)$ 得

$$\delta_n = (j+1)\delta_{n+1} + j\beta_{n+1} = \delta_{n+1} + j\Delta_{n+1}.$$

应用文中的 (18) 式于 $\Delta_n = \alpha_n + \beta_n$, 得出

$$\Delta_n = (i+1)\Delta_{n+1} = (2j+1)\Delta_{n+1}.$$

综合以上两式，得到

$$\begin{pmatrix} \delta_n \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 2j+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{n+1} \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix}. \qquad n \geqslant 1.$$

这样,

$$\begin{pmatrix}\delta_{n+1}\\ \Delta_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & 2j+1\end{pmatrix}^{-n}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \Delta_1\end{pmatrix},\qquad \Delta_1=\frac{1-\delta_1}{2j}.$$

由于

$$\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & 2j+1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -j(2j+1)^{-1}\\ 0 & (2j+1)^{-1}\end{pmatrix},$$

我们有

$$\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & 2j+1\end{pmatrix}^{-n}=\begin{pmatrix}1 & (-j)^n(2j+1)^{-n}\\ 0 & (2j+1)^{-n}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix}\delta_{n+1}\\ \Delta_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (-j)^n(2j+1)^{-n}\\ 0 & (2j+1)^{-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1\\ (1-\delta_1)/(2j)\end{pmatrix}.$$

由此解出

$$\begin{aligned}\delta_{n+1}&=\delta_1+\frac{(-j)^n}{(2j+1)^n}\frac{1-\delta_1}{2j}\\ &=\left[1-\frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n}\right]\delta_1+\frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n}.\end{aligned}$$

此式也适用于 $\mathscr{U}$. 于是

$$\delta_{n+1}(\mathscr{P})-\delta_{n+1}(\mathscr{U})=\left[1-\frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n}\right]\big(\delta_1(\mathscr{P})-\delta_1(\mathscr{U})\big).$$

这样，由假设 $\delta_1(\mathscr{P})>\delta_1(\mathscr{U})$ 得到

$$E_{n+1}\big(\delta_{n+1}(\mathscr{P})-\delta_{n+1}(\mathscr{U})\big)>\frac{5}{6}E_{n+1}\big(\delta_1(\mathscr{P})-\delta_1(\mathscr{U})\big)\to\infty\quad\text{as } n\to\infty.$$

(3) 当 $\alpha_1<\beta_1$ 时，证明类似. 首先有 $\alpha_n<\beta_n$, $n\geqslant 1$. 其次使用 $(*)$ 得出递推关系

$$\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \Delta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & 2j+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \Delta_{n+1}\end{pmatrix}.\qquad n\geqslant 1.$$

从而

$$\begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \Delta_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (-j)^n(2j+1)^{-n}\\ 0 & (2j+1)^{-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ (1-\alpha_1)/(2j)\end{pmatrix}.$$

由此解出

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}&=\alpha_1+\frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n}(1-\alpha_1)\\ \Delta_{n+1}&=\frac{1-\alpha_1}{2j(2j+1)^n}.\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \beta_{n+1}\\ &= \Delta_{n+1} - \alpha_{n+1}\\ &= \frac{1-\alpha_1}{2j(2j+1)^n}\big(1-(-j)^n\big) - \alpha_1\\ &= \frac{1-(-j)^n}{2j(2j+1)^n} - \left[1 + \frac{1-(-j)^n}{2j(2j+1)^n}\right]\alpha_1.\end{aligned}$$

由假设知 $\alpha_1(\mathscr{P}) < \alpha_1(\mathscr{U})$, 故同样有

$$E_{n+1}\big(\delta_{n+1}(\mathscr{P}) - \delta_{n+1}(\mathscr{U})\big) > \frac{5}{6}E_{n+1}\big(\alpha_1(\mathscr{U}) - \alpha_1(\mathscr{P})\big) \to \infty \quad \text{as } n \to \infty.$$

证毕.

试论“必须设对照试验的优选法”

陈 木 法

（数学系研究生）

文[1]提出了在实际中很有意义的优选问题，并就每批个数相同的情况给出了最优方法。在这篇短文里，我们证明：在每批个数任意的情况下，这类优选问题都可以变换成普通意义下的优选问题。因而，已有的单因素优选问题的全部结果都可以直接移植到这类优选问题上来。这就彻底地解决了这一类优选问题。

§1 方 法 介 绍

§1.1，限定 n 批情况

我们先回忆熟知的普通意义下（即不设对照点）限定 n 批的最优方法。由此稍加修改，便可得到必须设对照试验情况下的最优方法。

假设试验的初始区间是〔0,1〕。各批试验点的个数顺序为 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_n$。先利用如下递推公式算出诸 x_i 和 y_i $(0\leqslant i\leqslant n)$：

$$x_n=1,\qquad y_n=2,$$

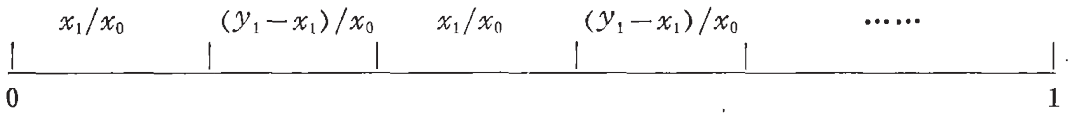
$$x_i=x(k_i+1)+\left[\frac{k_{i+1}+1}{2}\right]y_{i+1}$$

$$y_i=x(k_{i+1}+1)+\left[\frac{k_{i+2}+2}{2}\right]y_{i+1}\qquad (0\leqslant i\leqslant n-1)$$

于此，〔x〕表示不超过 x 的最大整数，而

$$x(k)=\begin{cases}1, & \text{当 } k \text{ 为偶数时},\\ 0, & \text{当 } k \text{ 为奇数时}。\end{cases}$$

其次，利用 x_i, y_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ 安排各批试验点。在第一批把区间〔0,1〕分成长为 x_1/x_0，短为 $(y_1-x_1)/x_0$。而且长短相间的 k_1+1 段，即



并在 k_1 分点上安排第一批试验，将试验点顺序编号为：

$$(0<)\alpha_{1,1}<\alpha_{1,2}<\cdots\cdots<\alpha_{1,k_1}(<1)$$

此时必定存在 j，使

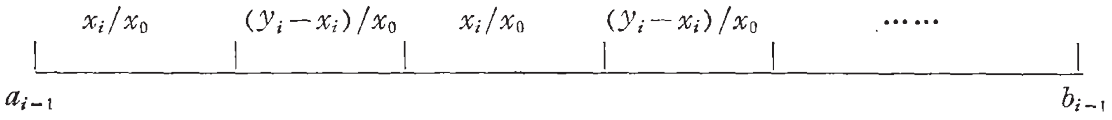
$$f(\alpha_{1,1})<\cdots\cdots<f(\alpha_{1,j-1})<f(\alpha_{1,j})>f(\alpha_{1,j+1})>\cdots\cdots f(\alpha_{1,k_1})$$

或：

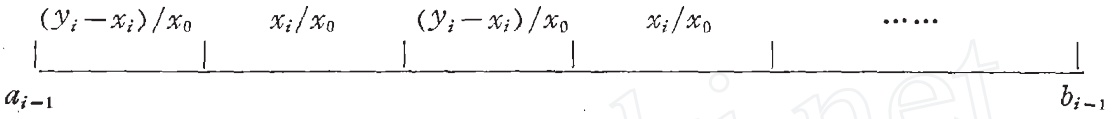
$$f(\alpha_{1,1})<\cdots\cdots<f(\alpha_{1,j-1})<f(\alpha_{1,j})=f(\alpha_{1,j+1})>f(\alpha_{1,j+2})>\cdots\cdots>f(\alpha_{1,k_1})$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因而总可消去区间$[\alpha_{1,j-1},\ \alpha_{1,j+1}]$以外的各段。我们用$[a_1,(c_1),b_1]$表示留下区间，称之为第一批剩余区间，其中$c_1$是第一批试验的“好点”。在第$i$ $(2\leqslant i\leqslant n)$批，将第$i-1$批剩余区间$[a_{i-1},(c_{i-1}),b_{i-1}]$分成长为$x_i/x_0$，短为$(y_i-x_i)/x_0$，且长短相间的$k_i+2$段，即



或



二者必居其一，且其中有一个分点是c_{i-1}。除c_{i-1}外还有k_i个分点，我们把这k_i个分点取作第i批试验点。

我们把上面所构造的试验方法记作$\mathscr{F}_n$。它是通常意义下$(k_1,k_2\cdots\cdots k_n)$序贯优选法。按照同样的构造规则，我们可以立即得到$(k_1,k_2+1\cdots\cdots k_n+1)$序贯的“必须设对照试验的优选法”$\widetilde{\mathscr{F}}_n$：它的第一批试验点就取为$\mathscr{F}_n$的第一批试验点；在第$i(2\leqslant i\leqslant n)$批，也是将第$i-1$批剩余区间分成长为$x_i/x_0$，短为$(y_i-x_i)/x_0$且长短相间的$k_i+2$段并在$k_i+1$个分点上安排第$i$批试验。所不同的是，这里第$i-1$批选出的“好点”，在第$i$批要作对照试验。

§1.2 最优分批问题

在文[2]中曾指出，在试验次数和试验批数预先给定的情况下，不同的分批方案对于试验效果影响甚大，这就是所谓“最优分批问题”。在不设对照试验情况，[3]和[5]已有详尽的研究。对于必须设对照试验的情况，当然也存在最优分批问题。今将最优分批方案说明如次：

设给定试验批数n和试验总次数$N+n-1$。

（一）当$n>1$，$N\geqslant 3n$时将N表成

$$N=ne+r\qquad(-n\leqslant r\leqslant n-1)$$

其中e为偶数，r为整数，这种表示法是唯一的，然后有三种情况：

（1）当$r=-n$时，最优分批方案是

$$(\underbrace{e,e,\cdots e}_{n-1},e-1)$$

（2）当$r\neq -n$，并且N与n的奇偶性不相同时，视$r\geqslant 0$或$r\leqslant 0$，最优分批方案分别是

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e}_{2\left[\frac{n-1-r}{4}\right]},\ \underbrace{e+2,\cdots,e+2}_{r},\ \underbrace{e,e+2,\cdots e,e+2}_{2\left[\frac{n+1+r}{4}\right]});$$

或：

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e}_{2\left[\frac{n-1+r}{4}\right]},\ \underbrace{e,\cdots,e}_{-r},\ \underbrace{e,e+2,\cdots e,e+2}_{2\left[\frac{n+1+r}{4}\right]})$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

（3）当 $r=-n$，并且N与n有相同的奇偶性时，视 $r\geqslant 0$ 或 $r\leqslant 0$，最优分批方案分别是

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e}_{2\left[\frac{n-2-r}{4}\right]},\ \underbrace{e+2,\cdots,e+2}_{r},\ \underbrace{e+2,e,\cdots e+2,e,e+1}_{2\left[\frac{n-r}{4}\right]})$$

或：

$$(\underbrace{e,e+2,e,\cdots,e+2,e}_{2\left[\frac{n+r}{4}\right]},\ \underbrace{e,\cdots,e}_{-r},\ \underbrace{e+2,e,\cdots e+2,e,e}_{2\left[\frac{n-2+r}{4}\right]})$$

（二）当 $1<n<N<3n$ 时，最优分配方案可从下面两个表得到。

表 1　n 为偶数时的最优分批方案

N	$(k_1,k_2,\cdots\cdots k_n)$
$n+1$	$\underbrace{(2,\cdots\cdots,2)}_{n}$
$n+2$	$\underbrace{(2,3,2,\cdots\cdots,2)}_{n-2}$
$n+2+l\ \left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-2}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,2,\cdots\cdots 2}_{n-2-2l},\ \underbrace{2,3,\cdots\cdots,2,3}_{2l})$
$\frac{3}{2}n+1+l\ \left(1\leqslant l\leqslant\frac{n}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,2,\cdots\cdots,3,2}_{n-2l},\ \underbrace{4,2,\cdots\cdots,4,2,4}_{2(l-1)})$
$2n+2l\ \left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-4}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,4,\cdots\cdots,4}_{2l},\ \underbrace{2,4,\cdots\cdots,2,4}_{n-2-2l})$
$2n+2l+1\ \left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-6}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,4,\cdots\cdots,4}_{2(l+1)},\ \underbrace{2,4,\cdots,2,4,2,3}_{n-6-2l})$
$3n-3$	$\underbrace{(2,3,4,\cdots\cdots,4,3)}_{n-3}$
$3n-2$	$\underbrace{(2,3,4,\cdots\cdots,4)}_{n-2}$
$3n-1$	$\underbrace{(2,4,\cdots\cdots,4)}_{n-1}$

表 1 和表 2 将 $n<N<3n$ 的N分为 $n+1$，$n+2$，$\cdots\cdots$ $3n-1$ 九类，对每一类给出最优分批方案于表的右方。

§1.3　批数无限的情况

在实践中常用无穷最优方法。设 $(k_1,k_2+1,\cdots)$ $(k_n\geqslant 1,\ n=1,2,\cdots)$ 是一无穷序贯。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 2　n 为奇数时的最优分配方案

N	$(k_1,k_2\cdots\cdots kn)$
$n+1$	$\underbrace{(2,2,\cdots\cdots,2)}_{n}$
$n+2$	$\underbrace{(2,3,2,\cdots\cdots,2)}_{n-2}$
$n+2+l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-1}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,2,\cdots\cdots,2}_{n-1-2l},\ \underbrace{3,2,\cdots\cdots3,2,3}_{2(l-1)})$
$\frac{3}{2}(n+1)+l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-1}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,3,2,\cdots\cdots3,2}_{n-1-2l},\ \underbrace{4,2,\cdots\cdots,4,2,4}_{2(l-1)})$
$2n+2l\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-5}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,4,\cdots\cdots,4}_{2l+1},\ \underbrace{2,4,\cdots\cdots,2,4,2,3}_{n-5-2l})$
$2n+2l+1\left(1\leqslant l\leqslant\frac{n-5}{2}\right)$	$(\underbrace{2,3,4,\cdots\cdots,4}_{2l+1},\ \underbrace{2,4,\cdots\cdots,2,4}_{n-3-2l})$
$3n-3$	$\underbrace{(2,3,4,\cdots\cdots,4,3)}_{n-3}$
$3n-2$	$\underbrace{(2,3,4,\cdots\cdots,4)}_{n-2}$
$3n-1$	$\underbrace{(2,4,\cdots\cdots,4)}_{n-1}$

在[4]中已经证明，方程

$$\begin{cases}x_n=\varkappa(k_{n+1})\,x_{n+1}+\left[\dfrac{k_{n+1}+1}{2}\right]y_{n+1}\\ y_n=\varkappa(k_{n+1}+1)\,x_{n+1}+\left[\dfrac{k_{n+1}+2}{2}\right]y_{n+1}\end{cases}\qquad(n\geqslant 0)$$

在条件 $x_0=1$ 下的解存在且唯一，特别，当 $k_1=k_2+1=k_3+1=\cdots\cdots=2k$ 时，其唯一解是

$$\begin{cases}x_n=iw^{n+1} & n\geqslant 0\\ y_n=w^n\end{cases}$$

其中 $w=\dfrac{\sqrt{k(k+4)}-k}{2k}$ 当 $(k_1,k_2,\cdots\cdots)$ 中有无穷多个奇数时，其解满足 $2x_n\geqslant y_n>x_n>0$ $(n\geqslant 0)$，此时按照 § 1.1 构造 $\mathscr{F}_n$ 的办法，我们可以构造一个不设对照试验的 $(k_1,k_2,\cdots\cdots)$ 序贯试验方法 $\mathscr{W}$。又用 § 1.1 中构造 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 的办法，我们得到必须设对照试验的 $(k_1,k_2+1,k_3+1,\cdots\cdots)$ 序贯试验方法 $\widetilde{\mathscr{W}}$。当 $k_1=k_2+1=k_3+1=\cdots\cdots=2k+1$ 时，命

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$x_n=\frac{1}{2(k+1)^n}$$

$$y_n=\frac{1}{(k+1)^n} \qquad (n\geqslant 1)$$

并取 $x_0=1$，我们也可以用§1.1的构造方法构造出 $\widetilde{\mathscr{W}}$。

在[6]中，我们讨论了不定批数条件下的最优性概念。特别，在不设对照实验情况下，对于 $k_n\equiv 2k(k\geqslant 1)$，每批等分取点的方法是最优的，而当 $k_n\equiv 1$ 时，黄金分割法是最优的。

§2 理 论 依 据

为应用方便，在§1中，我们已对各种不同情况详细地给出了“必须设对照试验”优选方法的具体方案。实质上，这些方法 $\widetilde{\mathscr{F}}_n$ 和 $\widetilde{\mathscr{W}}$ 都是普通意义下优选法 $\mathscr{F}_n$ 和 $\mathscr{W}$ 经过一个简单的“变换”得到的。在本节中，我们将给出这种变换的依据。

我们约定试验的初始区间为〔0,1〕，此区间上单峰函数的全体记作 $\mathscr{F}$，对每一个 $f\in\mathscr{F}$，以 c_f 表其峰值点。我们以 $\widetilde{f}$ 表示这样的有限序贯：$\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\subset\mathscr{F}$，它使得 $c_{f_i}=c_{f_1}\ i=2,\cdots\cdots,n$，并以 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 表示这种 $\widetilde{f}$ 全体所构成的集合。对于给定的正整数有限序贯 $(k_1,k_2,\cdots\cdots k_n)$，我们用 $\mathscr{P}$ 表示任意的 $(k_1,k_2\cdots\cdots,k_n)$ 序贯普通意义下的试验方法（或称为试验策略），$\mathscr{P}$ 作用于 $f\in\mathscr{F}$，在第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 步试验后，必可断定 c_f 落在某个小区间〔a_i,b_i〕内。在〔a_i,b_i〕若含有已试点，则记之为 c_i，命

$$\Delta(\mathscr{P},f,n)=b_i-a_i \tag{1}$$

$$\delta(\mathscr{P},f,i)=\begin{cases}b_i-a_i, & \text{若 } c_i \text{ 不存在}\\ max\{c_i-a_i,\ b_i-c_i\}, & \text{若 } c_i \text{ 存在}\end{cases} \tag{2}$$

$$\Delta(\mathscr{P},i)=\sup_f\Delta(\mathscr{P},f,i) \tag{3}$$

$$\delta(\mathscr{P},i)=\sup_f\delta(\mathscr{P},f,i) \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{4}$$

$\delta(\mathscr{P},i)$ 称为$\mathscr{P}$的 i 之步精度。

现在我们用 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 表示任意的 $(k_1,k_2+1,\cdots\cdots k_n+1)$ 序贯的必须设对照试验的试验方法，它作用于 $\widetilde{f}$ 在第 i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 步作用于单峰函数 f_i 并以前一批留下的好点作为对照试验点，对于每一个固定的 i，$\widetilde{\mathscr{P}}$ 作用于 f_i 之后可断定 c_{f_i} 必定落在某个〔a'_i,b'_i〕之内，命

$$[\tilde{a}_i,\tilde{b}_i]=\bigcap_{j=1}^{i}[a'_i,b'_i] \tag{5}$$

由于 $c_{f_1}=c_{f_2}=\cdots\cdots=c_{f_n}$，易见这样定义的区间必定存在。而且在〔$\tilde{a}_i,\tilde{b}_i$〕内至多有一个前 i 步的已试点，若这样的点存在，就记之为 $\tilde{c}_i$，命

$$\Delta(\widetilde{\mathscr{P}},\tilde{f},i)=\tilde{b}_i-\tilde{a}_i \tag{6}$$

$$\delta(\widetilde{\mathscr{P}},\tilde{f},i)=\begin{cases}\tilde{b}_i-\tilde{a}_i, & \text{若 } \tilde{c}_i \text{ 不存在}\\ max\{\tilde{c}_i-\tilde{a}_i,\ \tilde{b}_i-\tilde{c}_i\}, & \text{若 } \tilde{c}_i \text{ 存在}\end{cases} \tag{7}$$

$$\Delta(\widetilde{\mathscr{P}},i)=\sup_{\tilde{f}}\Delta(\widetilde{\mathscr{P}},\tilde{f},i),\quad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{8}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},i)=\sup_{\tilde{f}}\delta(\tilde{\mathscr{P}},\tilde{f},i)\qquad(1\leqslant i\leqslant n)\tag{9}$$

$\delta(\tilde{\mathscr{P}},i)$ 称为$\tilde{\mathscr{P}}$的 i 步精度。如果对于任何的 $\tilde{\mathscr{P}}$，$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\tilde{\mathscr{Q}},n)$，则称$\tilde{\mathscr{Q}}$为 n 步最优的。本文的主要目的在于证明 §1.1 中所构造的$\mathscr{F}_n$是$\tilde{n}$ 步最优方法，即证明

定理 对于任何的$\tilde{\mathscr{P}}$，

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,n)\tag{10}$$

证明 首先，对于每一个$\tilde{\mathscr{P}}$，我们可以作一个通常意义下的试验方法 $\mathscr{P}'$ 与之对应：$\mathscr{P}'$作用于 f 的第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 批试验点取为$\tilde{\mathscr{P}}$作用于$\tilde{f}_0=\{f_i:f_i\equiv f,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 的第 i 批除作对照用试点以外的试验点，这样一来，

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},\tilde{f}_0,i)\equiv\delta(\mathscr{P}',f,i),\qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

特别

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},\tilde{f}_0,n)=\delta(\mathscr{P}',f,n)$$

从而

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\mathscr{P}',f,n)$$

由于 $f\in\mathscr{F}$ 任意，故由[2]或[4]知

$$\delta(\tilde{\mathscr{P}},n)\geqslant\delta(\mathscr{P}',n)\geqslant\delta(\mathscr{F}_n,n)\tag{11}$$

另一方面，由 $\mathscr{F}_n$ 和 $\tilde{\mathscr{F}}_n$ 的构造方式不难看出 (12)

$$\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,\ n)=\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,n)$$

结合 (11) 与 (12) 便得 (10)，定理证毕。

上述定理建立了必须设对照试验条件下限定 n 批的最优方法。对于最优分批问题，无穷最优性和不定批数条件下的最优性问题均可由此简单地导出，譬如最优分批问题：若用 $\mathscr{R}_n$表示普通意义下的最优分批法（见[3]或[6]），其分批方案设为$(k_1,k_2\cdots\cdots k_n)$，相应的有 $\tilde{\mathscr{R}}_n$：$(k_1,\ k_2+1,\cdots\cdots k_n+1)$。设 $\mathscr{F}$ 是任意一种分批的最优方案，方案是 $(k'_1,\ k'_2+1\cdots\cdots k'_n+1)$，自然要求 n 和$\sum_{i=1}^{n}k_i=\sum_{i=1}^{n}k'_i=N$ 固定。相应的有 $\mathscr{F}_n$：$(k'_1,\ k'_2\cdots\cdots k'_n)$，则由通常意义下最优分批性和 (12)

$$\delta(\tilde{\mathscr{F}}_n,n)=\delta(\mathscr{F}_n,n)\geqslant\delta(\mathscr{P}_n,n)=\delta(\tilde{\mathscr{R}}_n,n)$$

此即说明 $\mathscr{R}_n$ 是最优分批方法。

致谢：本文是在贵阳师院完成的，对于曾给予作者亲切关怀和宝贵支持的院系领导和同志们，作者始终怀着深深的敬意！

参 考 文 献

〔1〕陈国先，必须设对照试验的优选法，数学的实践与认识 1 (1977)

〔2〕中国科学院数学研究所优选法小组，单因素优选法，数学的实践与认识 2 (1973)

〔3〕吴方，一个求极值问题，中国科学 1 (1974)

〔4〕洪加威，论批数不限定情况下一维优选问题的最优策略，中国科学 2 (1974)

〔5〕齐景泰，袁云耀，吴方，一个求极值问题 (Ⅱ)，数学学报 2 (1974)；Ⅲ，1 (1975)

〔6〕陈木法，论在不定批数条件下单因素优选问题的最优策略，贵阳师院学报 3 (1977)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

附件一. 论文表

(一). 独立完成的有

[1]. 抽象空间中的可逆马尔可夫过程. 数学年刊. Vol. 1. (1980) 437—451

[2]. 有限流出有势Q过程. 数学学报. Vol. 25. (1982), 136—166.

[3]. 一类算子方程的最小正解. 北师大学报. (1979). 3. 66—73.

[4]. 关于解析等的一点注记. 北师大学报. (1979). 1. 45—46.

[5]. 论不完次(批)数条件下单因素优选问题的最优策略. 贵阳师院学报. (1977). 3. 117—134.

[6]. 试论"必须设对照试验的优选法", 北师大学报 (1979). 4. 1—6.

(二). 与其他同志合作的有

[7]. 抽象空间中Q过程的唯一性准则 (与郑小吉合作). 中国科学, 中文 (1982). No. 4. 298—308
英文. (1983). No. 1. 11—20.

[8]. ωB 方程及其在瞬时Q过程构造论中的应用. 北师大学报 (1981). No.4, 1—15.

[9]. 马尔可夫过程与协论. 全文发表于书著[18]. 194—222. 摘要 (中、英文) 分别发表于《科学通报》20 (1980). 913—916; 25:10 (1980). 807—811.

[10]. 可逆Q过程存在准则. 发表于[18].

[11]. 可逆生灭过程. 发表于[18].

[12]. 强马氏性研究. 长沙铁道学院学报 (1979)

[13]. 有势Q过程的若干例子. 同上.

[14]. 一类Q过程的有势性. 北京师大学报. 3-4 (1980), 1—12.

以上文[9]—[14]与侯振挺合作.

[15]. 紧邻速度函数的拟可逆测度 (与丁万鼎合作). 数学年刊. Vol.2 (1981), 47—59

[16]. 一般速度函数的有势性和可逆性 (与严士健、丁万鼎合作). 数学年刊 (英文), Vol.3 (5) (1982), 572—586; Vol.3 (6) (1982), 705—720

[17]. λ_π - invariant measures (与 D. W. Stroock 合作). Lectures Notes in Math. Séminaire de Probabilitée XVII, 205—220. 986. (19

[18]. 环流分解和稳定性和自组织现象 (与严士健合作)

(三). 著作和译作

[19]. 可逆马尔可夫过程（与钱敏、侯振挺等合作）. 研究专著. 湖南科技出版社 (1979).

[20]. 随机场.（与严士健、丁万鼎合译）. 北京师大出版社 (1982).

[21]. 概率与统计（与刘秀芳、唐守正合译）. 文化教育出版社 (1981).

注. [2]. [7]. [9] 和 [16] 的摘要曾在新加坡国际数学会议上宣读过，并收入该会议文集 (1981). 又除了关于扩散的一个例子而外，[17] 也是独立完成的.

附件二. 参考文献

[22]. Kendall D.G. Some analytical properties of continuous stationary Markov transition functions. TAMS, 78, 2. 529—540 (1955).

[23]. 王梓坤. 生灭过程和马尔科夫链, 科学出版社 (1980)

[24]. 侯振挺、郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程, 科学出版社 (1978)

[25]. 杨向群, 可列马尔科夫过程构造论, 湖南科技出版社 (1981).

[26]. Feller, W. On the integro-diffirential equations of purely discontinuous Markoff process. Trans. Amer. Math. Soc., 48 (1940), 488—515

[27]. Doob J.L., Markov chains - denumerable case, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 455—473

[28]. Reuter G.E.H. Denumerable Markov processes and associated semigroup on l, Acta. Math., 97 (1957), 1—46

[29]. Feller, W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogoroff differential equation,

Am. Math. 65 (1957), 527—570.

[30]. 侯振挺，Q过程的唯一性准则，中国科学，2 (1974)，115—130.

[31]. 胡迪鹤，抽象空间中的马过程的构造理论，数学学报，16:2 (1966).

[32]. 郑小吉，抽象空间中马过程的连续性理论，数学物理学报 (1982).

[33]. Williams, D. A note on the Q-matrices of Markov chains, Z. Wahr., 7 (1967) 116—121.

[34]. 钱敏平，平稳马氏链的可逆性，北京大学学报，4 (1978)

[35]. Williams, D. On the construction problem for Markov chains. Z. Wahr. 3 (1964), 227—246.

[36]. 陈安岳，有限非保守、有限流出齐次Q过程，数学年刊 (1983)

[37]. 胡迪鹤，可逆的马尔可夫核，武汉大学学报 6 (1980), 63—82.

[38]. 郑小吉，抽象空间中的齐次马过程，北京师大学报 (1982)，抽象空间中的有限非保守、有限流出齐次马过程，北京师大学报 (1983)

[39]. Liggett T.M. The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles, Lecture Notes in Math. 598 (1976), 188–248. Springer-Verlag.

[40]. 唐守正. 自旋变相过程和可逆性. 数学学报 (1982).

[41]. 李世取, 混合型无穷质点马氏过程的有势性和可逆性, 数学年刊.

[42]. 岑之曲. 广义自旋变相过程和广义排它过程的有势性和可逆性, 数学年刊.

[43]. 任开隆. N组自旋变相过程和N组广义自旋变相过程的有势性和可逆性, 数学物理学报.

[44] 钱敏平. The decomposition of a stationary Markov chain into a detailed balanced part and a circulation part. Scientia Sinica (1979).

[45]. Stroock D.W. On the spectrum of Markov semigroups and the existence of invariant measures, Functional Analysis in Markov Processes, Proceedings Edited by M. Fukushima. Springer-Verlag (1981), 287–307.

[46]. Kiefer, J. Sequential minimax search for a maximum, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 502—506

[47] 华罗庚. 优选学. 科学出版社 (1981).

[48]. 洪加威. 论黄金分割法的最优性. 数学的实践与认识, 2 (1973)

[49]. 洪加威, 论批数不限定情况下一维优选问题的最优策略, 中国科学, 2 (1976).

[50]. 陈国先, 必须设对照试验的优选法, 数学的实践与认识, 1 (1977).