

量子力学的数学新视角

陈木法

(江苏师范大学数学研究院, 221116;

北京师范大学数学科学学院, 100875;

北师大数学与复杂系统教育部重点实验室)

摘要 在研究算法时遇到如下问题: 除实对称矩阵或复厄米矩阵之外, 何种更大的矩阵类具有实谱? 后者是量子力学的两大特征之一, 另一特征是波动性. 闻名于世的量子力学的“百年大战”就是围绕着波动方程的解是否存在“随机性”展开的. 我们将介绍这几年的探索, 以一个意外结果打开了一个新视角. 须知, 现代数学的多个分支源于量子力学. 可以想象, 新视角所触及的决非仅仅几个小课题.

关键词: 统计物理; 量子力学; 可厄米矩阵; 新谱论

MSC(2020) 主题分类: 81.02; 47B15; 60Jxx

中国分类: O413.1; O411.1; O211.62

一、背景: 源于算法和量子力学

1 源于算法的挑战. 实部最大的特征值

记 $\text{Diag}(v)$ 为以向量 v 为对角线的对角矩阵. 设

$$B = \text{Diag}(4 + 3i, 4 - 3i, 3 + 2i, 3 - 2i, 2 + i, 2 - i, 5 + i),$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3+i & 2 & 3 & 1 & 3+i \\ 5 & 4 & 2+i & 4 & 5 & 1 & i \\ 3-i & 2-i & 5 & 1+i & 2 & 1 & 3+i \\ 2 & 4 & 1-i & 2 & i & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -i & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

及 $A = P^{-1}BP$. 当然 A 是 B 的相似变换, 从而两者等谱. 我们所关心的是半群 $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ 的指数稳定性. 它由 A 的诸特征值的最大实部决定. 使用带推移的逆迭代(反幂法)

$$v_n = (z_{n-1}I - A)^{-1}v_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

*这是预印本. 在已发表的版本中, 略去了三幅照片并补充了一批物理学家的中文译字.

收稿日期: 2021-01-17. 录用日期: 2021-01-29.

初值为 (v_0, z_0) , 第 n 步输出为 (v_n, z_n) . 留心此法的要点是求得实部最大特征值的特征向量. 特征值的计算是特征向量的副产品(例如使用 Rayleigh 商).

图 1 是从 $z_0 = 62 + 6.2i$ 和 $v_0 = \mathbf{1}/\sqrt{7}$ 出发, 此处 $\mathbf{1}$ 为分量为 1 的常值向量而 z_0 取实部较大者以防掉进坑里, 依次所得到的 $\{\text{Re}(z_n)\}_{n=0}^{12}$ 的图像. 由图 1 可以看出: 从 $n = 8$ 开始, $\text{Re}(z_n)$ 就已非常接近于 $\max_j \text{Re}(\lambda_j) = 5$. 因此, 我们当然应有 $v_n \rightarrow g_{\max}$.

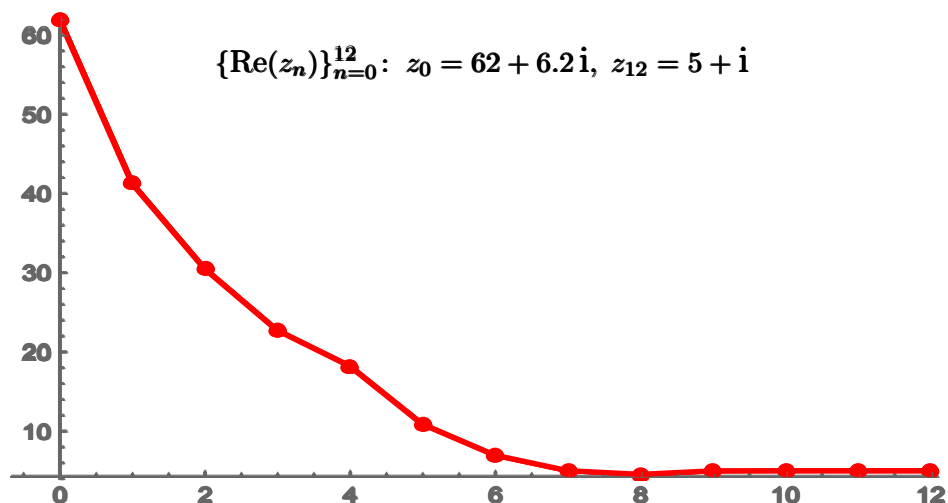


图 1 特征值实部的逼近序列 $\{\text{Re}(z_n)\}_{n=0}^{12}$

但图 2 中的 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 把我们完全搞晕了:

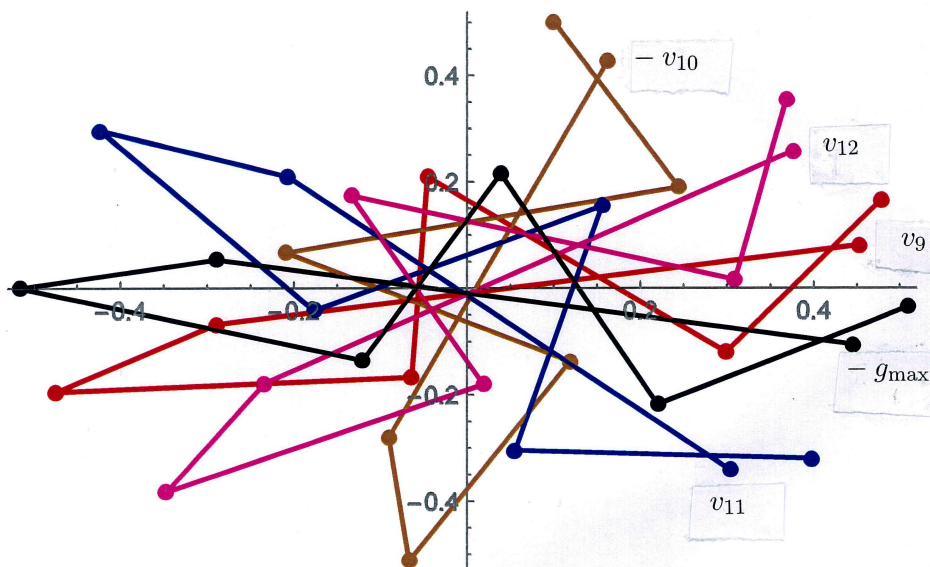


图 2 特征向量 $g_{\max}$ 的逼近序列 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$

图中的向量 $g_{\max}$ 加了负号, 是为将它的起点放到右半平面上; 同样地有 $-v_{10}$. 紧靠 $-g_{\max}$ 上方的点是该向量的第 1 个分量, 往左方依逆时针方向走逐次得出其它分量. 如图 2 所示, v_9 已很接近 $-g_{\max}$; 但 $-v_{10}$ 往上跑; v_{11} 往下掉; v_{12} 再回来一点. 看不出 $v_n \rightarrow g_{\max}$! 自然要问: $\{v_n\}$ 收敛吗?

2 源自量子力学的背景

这一节需要稍长一点篇幅介绍量子力学百年发展史中的几个片段: 矩阵力学、波动力学、两者等价性、源于量子力学的现代数学分支等, 从中可以体会到所研究课题的意义和价值. 本节包含一些历史文献, 作为旁证之用, 无需细读. 事实上, 粗读之后便可进入下一部分.

(1) 矩阵力学

量子力学主要是德国的 Werner Karl Heisenberg 于 1925 年创立的, 当时他不满 24 岁. 他于 7 年后的 1932 年获诺贝尔物理学奖 (后文简称为诺奖). 回想 Albert Einstein 年 (1905), 当时 26 岁的他是瑞士伯尔尼专利局一个小职员. 他写了 1 篇博士论文并向德国《物理年鉴》(Ann. Physik) 提交了 4 篇论文, 这些论文包括现代物理中三项成就: 分子运动论、狭义相对论和光量子假说, 乃划时代文献. 其中“光量子假说”的论文赢得 1921 年诺奖. 讲到这里, 相信大家的心灵都会有所触动. 我们都会期盼在这块土地上出现这样的有史诗般创造的科学家.



图 3 Werner Karl Heisenberg 获 1932 年诺奖

颁奖词称奖励“他对于量子力学的创造，特别地，这导致了氢的同素异形形式的发现”。此处及随后的颁奖词见“List of Nobel laureates in Physics”, Wikipedia.

Heisenberg 的诺奖是第二年 (1933) 才颁发的. 同年获奖的是奥地利的 E.R.J.A. Schrödinger 和英国的 P.A.M. Dirac.



图 4

Erwin Rudolf Josef
Alexander Schrödinger



图 5

Paul Adrien
Maurice Dirac

颁奖词是“发现原子理论的新的多产形式”.
其实, 如同随后很快将要看到: 当年他们也是量子力学的主要贡献者.

量子力学先驱有以下三位:

- Max Planck (诺奖 1918): 于 1900 年提出黑体辐射公式: 辐射频率是 ν 的能量的最小数值 $\varepsilon = h\nu$, 其中 h 为普朗克常数.
- Albert Einstein (诺奖 1921): 于 1905 年提出光量子假说.
- Niels Bohr (诺奖 1922): 于 1913 年提出原子(结构)模型. 他被称为哥本哈根学派的教主.

矩阵力学创立于 1925 年, 参见 [38]. 共有 4 篇论文:

- Heisenberg^[21] (诺奖 1932) (1925 年 7 月 29 日投稿).
- Max Born (诺奖 1954) & Pascual Jordan^[4] (1925 年 9 月 27 日投稿).
- Paul Adrien Maurice Dirac^[17] (诺奖 1933) (1925 年 11 月 7 日投稿).

- Born, Heisenberg and Jordan^[3] (1925 年 11 月 16 日 投稿).

玻尔模型中许多观点, 如电子的轨道、频率等, 都不是可以直接观察的. 海森堡期望创造一个理论, 只是使用在实验中经常接触到郁光谱线的频率、强度、偏极化以及能阶等可观察量. 据说这种想法源于与 Bohr 的一次 3 小时的郊外散步. 第一篇原创论文 [21] 使用的是列表处理. 他将论文送给他的老师 Born, 随后外出访学. Born 苦思多日. 领悟出前者的几个表实际上是矩阵乘法. 他随后与数学家 Jordan 合作, 写出上述第二文[4]. 此文首次使用矩阵. 由此定名为“矩阵力学”. 一个多月后, 他们三人合作完成了第四文 [3]. 这三人的快速合作不难理解, 因为都在德国. 但 Dirac 的快速反应(第三文) [17] 令人吃惊.

现有矩阵力学所研究的基本物理单元是厄米矩阵, 这是最基本的具有实谱的复矩阵.

(2) 波动力学

1926 年, E. Schrödinger (诺奖 1933) 在《物理评论》(Phys. Rev.)上发表了“原子和分子力学的波动理论”^[33] (1926 年 9 月 3 日投稿), 发现了量子力学的第二种形式—波动力学.

Schrödinger 方程的基本形式为

$$i\hbar\dot{\psi}(t) = (-\gamma\Delta + V)\psi(t),$$

此处 $\dot{\psi}$ 是 ψ 关于 t 的导数. 常数 $\gamma = \frac{\hbar^2}{2m}$. 为简单计, 如无特别需要, 以下我们常略去此常数 γ 不写. 如果 V 是实的, 很自然可考虑空时分离解:

$$\psi(t, x) = e^{-2\pi i Et/\hbar} \varphi.$$

此时, 原方程变为

$$(-\Delta + V)\varphi = 2\pi E\varphi =: \tilde{E}\varphi,$$

其中 φ 是与时间无关的定态解. 改记 $\tilde{E}$ 为 E_m , 它是第 m 个特征值(能级), 相应的特征向量为 ψ_m . 这给出

$$\text{能量 } (\psi_m, (-\Delta + V)\psi_m) = E_m(\psi_m, \psi_m) = E_m,$$

此处使用了归一化:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi_m|^2 dx = 1.$$

简单地说, 将对应于特征值 E_m 的特征向量的模平方 $|\psi_m|^2$ 视为概率密度. 这相当于使用了随特征值流动的概率空间.

(3) 两种力学的等价性 (1926–1930)

从提出波动力学的当年开始, 就有多人证明了两种力学的等价性^[5]:

- Schrödinger^[34], 1926;
- Clark Eckart^[19] (24 岁), 1926;
- Dirac^[18] 1930.
- John von Neumann, 1927–1929 年间的多篇论文及总结性专著^[39].

(4) 百年大战

1926 年 Born 称 ψ_m 为概率幅 (Probability amplitude). 他于 1954 年获诺奖, 颁奖词为: 基于“他在量子力学方面的基础研究, 特别是对波函数的统计解释”. 然而, Schrödinger 从来没有接受如哥本哈根学派所倡导的那样“几乎是精神上的”正统的解释. Einstein 则说:“上帝不掷骰子!”

百年来的研究史证明, 量子力学拥有非常神秘的内蕴, 以至于多位名家都称无人真懂量子力学.

- Bohr 说: “如果有人不被量子力学弄晕, 那么他一定不懂量子力学.”
- Einstein 说: “我思考量子力学的时间百倍于广义相对论, 但依然不明白.”
- Feynman (1918-88) 因其于 1949 年引进非常有用的 Feynman 图而闻名于世 (但至今尚无严格理论), 于 1965 年获诺奖. 他说: “据说世界上只有三个人了解相对论, 我不知道他们是谁. 但是, 我想我可以肯定地说没有人理解量子理论!”

也许, 直至今日, 这种状况并没有改变, 参见[24].

(5) 量子力学与现代数学

Schrödinger 出身于统计物理, 在文 [35, 36] 中, 他曾试图找到一个由经典概率导出的方程, 该方程的特征尽可能接近他的波动方程. 这引发了大量的后续研究. 例如后面将要提及的可逆马尔可夫过程和狄氏型理论, 还有“Schrödinger 扩散过程”, 见 [2, 30, 31] 及书中文献.

与此相关, 还有几类复值随机过程:

- SLE 理论. 一维复值布朗运动(归功于 P. Lévy). 例如见 [25] 及书中文献.

- 多重次调和函数(plurisubharmonic functions)的狄氏型. 参见 [20] 及其中文文献.
- 复值马尔可夫链与 Feynman 积分. 参见 [23; 第 9 章] 和 [27] 及书中文献.
- 量子概率, 量子随机分析. 参见 [1, 32] 及书中文献.

在量子力学发展的早期, 人们就摸索比厄米矩阵类更大的对象. 一个典型例子是 1934 引进的 Jordan 代数, 力图以它代替厄米矩阵类. 有趣的是, 笔者母校的刘绍学老师曾于 1964 年在《数学进展》上发表了一篇关于这种代数的论文. 可见当年 Jordan 代数的活跃程度. 1983 年, Efim Zel'manov 证明: Jordan 代数最多只是 27 维的 Albert 代数, 对于量子力学而言当然太小, 所以这一研究思路被卡住了. 2019 年有位朋友告知, 超弦理论也是卡在 27 维. 不知何因? 也是 Zel'manov, 他应用 Jordan 代数, 解决了 Burnside 问题, 获 1994 年 Fields Medal. 关于此代数, 笔者共查到 8 本书, 其中有 1 本是关于统计的应用. 较新的一本是 [28].

近年来, 还兴起了非厄米量子力学, 例如 $\mathcal{PT}$ 对称的 Psuedo 量子力学. 参见 [29] 及书中文献.

仔细想想, 便可发现量子力学对现代数学的巨大影响. 下面列出源于量子力学或受其深度影响的一些数学分支.

- Free 概率, 量子逻辑;
- (复)偏微分方程, Hilbert 空间, 谱理论;
- 算子代数: C^* (W, Weyl, Jordan, von Neumann) 代数等;
- Heisenberg 群, 量子群;
- 非交换几何;
- 量子力学计算;
- 量子+几何: 超对称, 超弦.

关于量子计算, MatLab 最早就是为量子力学设计的. 现在, 差不多每一种重要软件, 如 Mathematica, Maple 等都有专门书籍介绍如何将该软件应用于量子力学. 本文的下一部分将谈到: 现代概率论中的可逆马尔可夫过程及狄氏型理论, 源于 Andrey Nikolayevich Kolmogorov 于 1936 年和 1937 年的工作, 也植根于量子力学.

因为难于计算, 矩阵力学在很长时期内大多处于沉睡状态. 量子力学研究大多集中于波动力学, 后者有强有力的分析工具支撑. 近些年来, 也因为计算的进步, 矩阵力学大有复兴之势. 例如见 [22, 26].

至此, 我们回顾了量子力学对数学的深刻影响, 两学科之间互帮互助、协同发展的历史片段. 笔者学习量子力学只是近两年的事, 受到深深的震撼, 所以记录下这小节以供纪念. 记得 M. Atiyah 以前曾说过: “Quantum” 对他来说依然是 “a big word (一个很大的、难以捉摸的单词)”. 他有一梦想: 建立 “量子与数学的联盟”.

二、从厄米矩阵到可厄米矩阵, 判别准则(简称判准)和等谱矩阵

回到摘要讲的问题: 什么矩阵具有实谱? 笔者想到的是作为矩阵算子, $A = (a_{ij})$ 在某 $L^2(\mu)$ 空间上是自伴的, 那它在此空间上的谱就是实的. 也许你对这个解答会感到失望, 因为大家上大学时早就学过. 事实并非如此, 实际上, 没有哪一本书告诉你是否存在及如何找出这个测度 μ ?

事实上, 这个发展经历了很长时间:

可逆 (reversible, 1936 年) $\longrightarrow$ 可配称 (symmetrizable, 1979)
 $\longrightarrow$ 可厄米 (Hermitizable, 2018).

1936 年, A.N. Kolmogorov 首先对有限马尔可夫链 (有限非负矩阵) 引进了可逆性概念. 有趣的是: 该文的开头和结尾都引用了 Schrödinger 1931 年的文章. 1937 年, 他研究扩散过程 (二阶椭圆微分算子) 的可逆性. 这就开辟了现代可逆马尔可夫过程 (或更一般的狄氏型) 的新学科分支. 就可数空间情形, 将 “可逆” 拓广为 “可配称” 的系统工作, 是笔者与侯振挺老师于 1979 年完成的. 直至 2018 年, 所有的研究都限于非对角线元素非负的矩阵. 对于马尔可夫过程而言, 此条件是自动满足的. 这样, 是 Kolmogorov 最早将量子力学、确切地说是统计力学引入概率论; 当然, 将概率论与统计力学真正交叉是一直到 1960 年代中叶的事, 参见 [6, 7] 及所引文献. 然而所有这些研究都限于实的情形. 2018 年, 源于算法研究的需要, 笔者引进了可厄米矩阵工具. 42 年前的 “可配称” 理论是我们进入统计力学的敲门砖, 也是我们在国际上立足的第一个成果. 没想到, 后来找到 “可厄米” 的平行理论, 使我们很自然地进入量子力学.

定义 1 (陈 2018 [10]). 称复矩阵 $A = (a_{ij})$ 可厄米, 如存在正的 $\mu = (\mu_k)$ 使得对于每一对 (i, j) , 有 $\mu_i a_{ij} = \mu_j \bar{a}_{ji} (\Rightarrow$ 对角线元素为实).

简单地说, 虽然矩阵 (a_{ij}) 非厄米, 但 “配上” 测度 μ 之后, 矩阵 $(\mu_i a_{ij})$ 就成为厄米矩阵了. 退到实的情形, “可厄米” 就成为 “可配称”. 当 $\mu_k \equiv 1$ (均匀测度) 时退回实对称或复厄米情形, 这相当于处于均匀介质. 对

于无穷(维、阶)矩阵, 此时不存在(平衡态)统计力学. 因为对于统计力学, $\mu = \text{Gibbs}$ 态, 必定为概率测度. 同样地, 若 $\mu_k \equiv 1$ 且矩阵无限, 对于马氏过程, 意味着此系统必定走向灭绝, 可见实际应用的价值极为有限, 例如仅限于传染病模型. 如同 Kolmogorov 所说: 概率论的应用都是通过平稳概率分布来实现的. 所以将“厄米”换成“可厄米”有极重要意义. 遗憾的是: 虽然可配称思想我们已经使用了 42 年, 但在矩阵论、泛函分析、计算数学、物理学中好像还几乎没有什么关注. 就我们所知, 可厄米工具在上述各学科中都是新的, 是值得开垦的新领域. 顺便提及: 最近我们对计算的主要贡献之一就是使用可配称和可厄米理论, 例如见 [10, 14, 15].

定理 2 (可厄米判准. 陈 2018 [10]). 复矩阵 $A = (a_{ij})$ 可厄米, 当且仅当下述两条件同时成立.

- 1) 对每一对 (i, j) , 或者 a_{ij} 与 a_{ji} 同为零, 或者 $a_{ij}a_{ji} > 0$.
- 2) 对每一最小闭路 (也就无往返), 圈形条件成立.

此处需要解释上述 2) 所用到的图结构. 如 $i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$, 就记作 $i \rightarrow j$. 这样, 就有闭路 $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n = i_0$. 所谓最小者乃指它不包含任何一个子闭路. “圈形条件”说的是对于每一如上的闭路, 都有

$$a_{i_0 i_1} \cdots a_{i_{n-1} i_n} = \bar{a}_{i_n i_{n-1}} \cdots \bar{a}_{i_1 i_0}.$$

即沿此闭路的一个方向诸项 $a_{i_k i_{k+1}}$ 的连乘积等于沿此路反方向诸项连乘积的共轭. 对于非对角线元素非负的特殊情形, 这个圈形条件归功于 Kolmogorov (1936). 笔者与侯老师 42 年前的主要贡献是只需验证“最小闭路”. 很多时候, 甚至于只需检查“四边形”或“三角形”的单一闭路便可. 这使我们能够走得很远, 包括可数无穷维. 例如见 [6; 第 7 章、第 11 章及第 14.5 节].

如何算出测度 μ ? 先固定参考点 i_0 并设 $\mu_{i_0} = 1$. 然后, 对于每 $j \neq i_0$, 任选一条路 $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n = j$, 则可取

$$\mu_j = \frac{a_{i_0 i_1}}{\bar{a}_{i_1 i_0}} \frac{a_{i_1 i_2}}{\bar{a}_{i_2 i_1}} \cdots \frac{a_{i_{n-1} i_n}}{\bar{a}_{i_n i_{n-1}}}.$$

我们还有验证圈形条件和求出厄米化测度 μ 的算法, 见 [12; Algorithm 1].

作为定理 2 的直接应用, 我们来看看三对角/生灭矩阵的特殊情形. 设 $E = \{k \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq k < N+1\}$ ($N \leq \infty$). 我们定义形式上相同的两个矩阵

T 和 Q (称为生灭矩阵)如下:

$$\begin{matrix} T \\ Q \end{matrix} = \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & & & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & \\ & a_2 & -c_2 & b_2 & \\ & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & & & a_N & -c_N \end{pmatrix},$$

对于 T , $(a_k), (b_k), (c_k)$ 为 3 个复数序列. 对于 Q , 要求: $a_k > 0, b_k > 0$, 每行行和为零. 若矩阵有限, 还要求末行行和小于零. 常简记为 T (或 Q) $\sim (a_k, -c_k, b_k)$.

推论 3 (三对角矩阵可厄米化判准. 陈 2018 [10]). 三对角矩阵 $T \sim (a_k, -c_k, b_k)$ 可厄米, 当且仅当下述两条件同时成立.

- 1) 对角线元素为实;
- 2) 或者 a_{i+1} 与 b_i 同为零, 或其积为正.

此时,

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \mu_{n-1} \frac{b_{n-1}}{\bar{a}_n}, \quad n \geq 1.$$

随后, 我们将略去“ a_{i+1} 与 b_i 同为零”情形, 因为此时可分块处理.

在继续深入之前, 注意可厄米矩阵 T 与生灭 Q 之间的差别. 粗略地说, T 由 5 个实数列决定, Q 由 2 个正数列 (等价地, 1 个实数列) 决定. 两者相距甚远. 我们之所以把它们放在一起, 是因为发现了两者之间存在血缘关系: 每一个可厄米的 T 都与某个生灭 Q 等谱 (有限或无限矩阵), 不妨将后者记作 $\tilde{Q} \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$. 更“神”的是, 我们可用两个已知的正数列 (c_k) 和 $u_k := a_k b_{k-1} = |a_k b_{k-1}|$ 将 $\tilde{Q}$ 显式地表示出来. 最关键的是下述的单步迭代:

$$\tilde{b}_k = c_k - \frac{u_k}{\tilde{b}_{k-1}}, \quad \tilde{b}_0 = c_0.$$

凡单步迭代总是显式. 此处是连分式

$$\tilde{b}_k = c_k - \frac{u_k}{c_{k-1} - \frac{u_{k-1}}{c_{k-2} - \frac{u_{k-2}}{\ddots \frac{u_2}{c_2 - \frac{u_1}{c_1 - \frac{u_1}{c_0}}}}}}, \quad 1 \leq k < N.$$

有了序列 $(\tilde{b}_k)$ 之后, 容易完成 $\tilde{Q}$ 的构造. 这里需要一点条件: 对每一 k , $c_k \geq |a_k| + |b_k|$. 当矩阵有限时, 只需用 $T + mI$ ($m \gg 1$) 代替 T . 然后, 命

$$\begin{cases} \tilde{c}_k \equiv c_k; \\ \tilde{a}_k = c_k - \tilde{b}_k, \quad k < N; \quad \tilde{a}_N = u_N / \tilde{b}_{N-1} \text{ 如 } N < \infty, \end{cases}$$

这里, $\tilde{a}_k$ 的取法只是因为 $\tilde{Q}$ 行和的要求.

下面是本文称之为“新视角”的一个结果.

定理 4 (算法. 陈 2018 [10]). 对于每一个 $T \sim (a_k, -c_k, b_k)$, 只要 $c_k \geq |a_k| + |b_k|$ 对任意 k 成立, 则 T 与如上构造的生灭矩阵 $\tilde{Q} \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$ 等谱 (对有限矩阵, 即有相同特征值).

此结果似乎简单得让人瞧不起. 是的, 一个好的数学结果不仅需要简洁, 还要求有深刻内涵和根本性 (即处于底层, 从而可扩展). 要看出此结果不简单, 只需想想为何 $\tilde{a}_k$ 和 $\tilde{b}_k$ 为正? 从定义看不出这一点. 此处, 我们再指出一个关键点. 这是笔者和张旭于 2014 年找到的一种 h 变换 [16]. 给定一个复矩阵或二阶微分算子. 比如说 A , 我们要构造一个等谱算子 $\tilde{A}$. 方法是使用近乎处处调和函数 h : $Ah = 0$ 近乎处处, 对于矩阵情形, 它将 A 的所有行和变为零; 对于微分算子情形 (例如 Schrödinger 算子), 它将位势项化为零. 对于目前的三对角矩阵 T , 调和方程乃相对简单的二阶差分方程. 众所周知, 对于变系数的二阶微分/差分方程, 并无通解. 所能指望的是寻求特解, 这全靠“锦囊妙计”. 在 2014–2018 年间, 笔者曾做过两次努力, 一直未能找到 h 的较好的表达式. 现在, 使用上述构造的变换 $T \rightarrow \tilde{Q}$, 我们可写出很简单的表达式:

$$h_0 = 1, \quad h_n = h_{n-1} \frac{\tilde{b}_{n-1}}{b_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

等价地,

$$h_0 = 1, \quad h_n = \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j / \prod_{j=0}^{n-1} b_j, \quad n \geq 1.$$

此式表面上简单, 却是典型的马后炮. 假如把上述的 $\tilde{b}_k$ 代进去, 容易看出 $\{h_n\}$ 与所给定的 T 的关系实质上极为复杂, 所以难怪之前费那么大劲都没能找到现在这么好看的 $\tilde{Q}$. 应当特别指出: h 变换拥有普适性. 它将给谱理论带来很大困扰的“位势”项排除, 代之以标准的随机过程的生成元或二阶椭圆算子 (参见本文第四部分).

得出这样的结果是非常不容易的. 笔者前后共发表了三个不同证法: 原证 2018 [10]; 两个直接证明 2020 [11]).

三、离散谱

量子力学只关心离散谱 (分立谱). 对于有限矩阵, 谱总离散. 因而只需考虑无穷矩阵. 本节给出三对角矩阵离散谱的显式判准. 由等谱性, 只需写出关于 Q 矩阵情形的答案. 使用定理 4, 由它可立即得出可厄米 T 的谱离散性判准.

命 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. 设 $\tilde{Q} \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$. 定义

$$\tilde{\mu}_0 = 1, \quad \tilde{\mu}_k = \frac{\tilde{b}_0 \cdots \tilde{b}_{k-1}}{\tilde{a}_1 \cdots \tilde{a}_k}, \quad k \geq 1.$$

记 $L^2(\tilde{\mu})$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 上关于测度 $\tilde{\mu}$ 平方可积的实函数所构成的空间, 其常用内积记为 $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\mu}}$. 由第 2 节已知, $\tilde{Q}$ 可配称, 这等价于由二次型 $(-\tilde{Q}f, g)_{\tilde{\mu}}$ 所定义的算子为自伴 (自共轭). 只是此时需要指定算子的定义域. 我们所关心的有两个. 其一为最大者: 它由满足条件 $(-\tilde{Q}f, f)_{\tilde{\mu}} < \infty$ 的函数 $f \in L^2(\tilde{\mu})$ 构成. 其二是小者: 它由具有有限支撑的函数张成. 将两个算子分别记为 $\tilde{Q}_{\max}$ 和 $\tilde{Q}_{\min}$. 为读者方便, 我们重述取自 [9, 11] 的下述结果.

定理 5 ([9, 11]).

(1) 设 $\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\mu}_k \tilde{b}_k)^{-1} < \infty$. 则 $\text{Spec}(\tilde{Q}_{\min})$ ($:= \tilde{Q}_{\min}$ 的谱) 离散当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \tilde{\mu}_j \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{\mu}_k \tilde{b}_k)^{-1} = 0.$$

(2) 设 $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mu}_j < \infty$. 则 $\text{Spec}(\tilde{Q}_{\max})$ 离散当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \tilde{\mu}_j \sum_{k=0}^n (\tilde{\mu}_k \tilde{b}_k)^{-1} = 0.$$

(3) 设 $\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\mu}_k \tilde{b}_k)^{-1} = \infty = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mu}_j$. 则 $\text{Spec}(\tilde{Q}_{\min}) = \text{Spec}(\tilde{Q}_{\max})$ 非离散. 特别地, 当

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mu}_i \sum_{j=i}^{\infty} (\tilde{\mu}_j \tilde{b}_j)^{-1} = \infty$$

时, 结论成立.

通常, 三对角矩阵对应于一维二阶椭圆算子, 两者的故事是平行的. 当然, 使用 h 变换可让我们去掉位势项, 回归通常理论. 所以自然要问, 此时的调和函数 h 是什么? 我们不久前才找到答案. 请容许此处略去答案不提 [13]. 更进一步, 对于矩阵情形, 上述的“三对角”条件可以去掉. 即每一可厄米矩阵等谱于某个生灭矩阵的谱.

引理 6. 复矩阵 $A = (a_{ij})$ 关于 μ 可厄米, 等价地

$$\text{Diag}(\mu)A = A^H \text{Diag}(\mu), \quad A^H := \bar{A}^*$$

当且仅当

$$\text{Diag}(\mu)^{1/2} A \text{Diag}(\mu)^{-1/2}$$

为厄米矩阵.

由此得知, 关于厄米矩阵的每一理论/算法均可延拓至可厄米矩阵. 非常可贵的是在文 [10] 中, 我们引进了将两者耦合在一起的算法. 又见 [14]. 更进一步, 还有拟配称化算法 [15].

Householder 变换. 对于每一 $m \times m$ 厄米矩阵 H , 存在一个推广的反射矩阵序列 $\{U_j\}_{j=1}^{m-1}$ 使得 $U := \prod_{j=1}^{m-1} U_j$ 为酉矩阵且 $T := UH U^H$ 变成实的、对称的三对角矩阵.

这样, 我们得到

$$\text{可厄米矩阵 } A \sim \text{厄米矩阵 } H \sim \text{三对角矩阵 } T \sim \text{生灭矩阵 } \tilde{Q},$$

此处 ‘ $\sim$ ’ 为‘等谱’. 更多细节见 [12; §4].

生灭矩阵理论有极丰富的积累, 千页的书恐不足于收入完整成果. 例如说笔者这一辈子写的最长一篇文章, 只讨论生灭, 发表出来有 137 页 [8].

如果从 C.G.J. Jacobi 1846 年的论文算起, 矩阵的特征问题已经历了 175 年. 2000 年初, 《科学与工程计算》(*Comput. Sci. Eng.*) 刊出由美国物理研究所 (Amer. Inst. Phys.) 和 IEEE 计算机协会 (IEEE Comput. Soc.) 联合评选发布的 20 世纪的 10 大算法. 其中矩阵特征问题的算法占 3 个, 其中的一个就是刚刚讲的 Householder 变换. 因此, 在这方面的任何进步都来之不易. 现在, 我们已经把复可厄米矩阵 A 在复 $L^2(\mu)$ 上的谱等同于某生灭矩阵 $\tilde{Q}$ 在实 $L^2(|h|^2 dx)$ 上的谱. 因为有了共同的标架, 可以讨论如上面所做过的离散谱的判准等. 更进一步, 我们已经完成可厄米矩阵的前面几个特征值的算法, 并已编程 [12]. 顺便提及, 基于 Schrödinger 方程, 对于量子化学, 量子计算是一个很成熟的领域. 已

有“Density Functional Theory” (获 1998 年诺贝尔化学奖): 有至少 15 种软件 (其中 10 种免费). 我们期盼基于矩阵力学的新想法也能在量子力学计算方面取得更多新进展.

至此, 我们已经做了一件很有意义的工作. 回想前面所述的百年大战, 其实还有 “Schrödinger 的猫” 等故事. 下面是前面已提到的 Schrödinger 所不接受的 Copenhagen 诠释. Bohr 于 1927 年 9 月提出 “互补性原理”: “电子具有波、粒二重性, 当你观察它们时呈粒子性, 不观察它们时以波的形式存在. 这称为波、粒对偶, 依赖于你以何种方式观察它.” 这是至今为止物理学界所接受的传统解释. 如前所述 Schrödinger 至死不能接受, 是因为他觉得这有种心理学的味道. 2019 年笔者见到一篇文章说 “Copenhagen 诠释死掉了”. 所以说是 “百年大战”, 一点都不假. 大家也已经看到, 按照我们的路子, 波动性源于复结构, 没的说. 但不是来自随机性. 从这点看, Einstein 是对的. 我们的谱同构, 使用的是某种 “滤波” 技术, 给出了统一的参考标架, 用于观测. 如同照相, 需要寻找好位置、排除障碍. 虽然同样用于观察, 但好像不牵涉波、粒二重性. 似乎也没有多少可争论的.

在最近的新书 [37; p. 71] 再次强调 $|\psi|^2$ 可观察, 但 ψ 不然. 从 ψ 到 $|\psi|$, 只忽略了因子 $e^{i\theta}$.

现在, 我们可以回到一开头所讲的被特征向量迭代 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 搞晕的问题. 正是因为这个问题笔者才开始认真思考复矩阵及本文所讲的故事. 图 2 显示, 诸向量 $\{\tilde{v}_k\}_{k=9}^{12}$ 是在旋转. 旋转即波动, 不会改变模 $\|e^{i\theta_n}x\| \equiv \|x\|$. 我们现在把旋转去掉: 将每一向量除以它的第一个分量 $\tilde{v} := v/v(0)$. 这样, 5 个向量有共同的起点: 实轴上的 1. 将重整化后的 5 个向量画出来, 得出图 6. 除了 $\tilde{v}_9$ 稍许偏离而外, 其它的已无可见的差别. 事实上, $\tilde{v}_{12}$ 与 $\tilde{g}$ 相差 10^{-14} . 换言之, 这组向量构成一组近似的保角(共形)变换. 对于给定的 v_{n-1} 和推移 z_{n-1} , 命

$$w = (z_{n-1}I - A)^{-1}v_{n-1}.$$

当然, w 的辐角常不同于 v_{n-1} 的辐角, 从而迭代过程中, 辐角常在变. 然而通常的归一化程序 $v = w/\|w\|$ 不会改变 w 的辐角.

回到前面所述的变换

Hermitizable 矩阵 $\rightarrow$ Hermite 矩阵 $\rightarrow$ 实对称矩阵 $\rightarrow$ 生灭矩阵,

头、尾两步可能改变长度, 但中间一步是酉变换, 不改变长度, 只改变辐角 (反复多次). 到最后当然回到实 L^2 的坐标系.

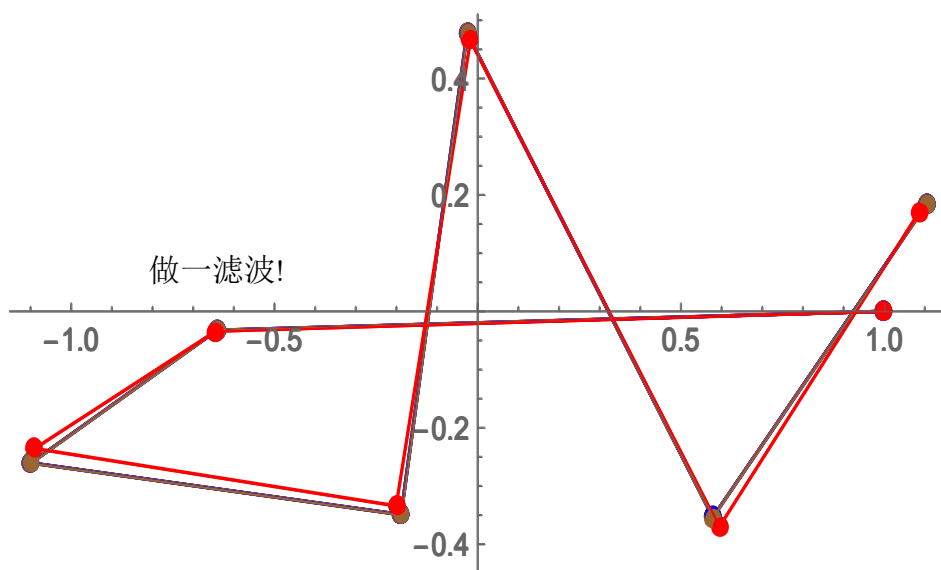


图 6 $\tilde{v}_{10}, \tilde{v}_{11}, \tilde{v}_{12}$ 及 $\tilde{g}$ 几乎重叠. 稍许偏离者(左边偏上、右边偏下)者为 $\tilde{v}_9$

至此, 我们已经给出了所谓波粒二重性(也称为波粒二象性)的一种比较自然的解释. 最后一步在统一的实 $L^2(|h|^2 dx)$ 上, 这与波动力学的流动空间完全不同! 计算生灭矩阵 $\tilde{Q}$ 的谱(观测), 自然无需用到函数 h 的辐角. 然而在复 $L^2(\mu)$ 上观测可厄米矩阵 A , 当然是在复的世界里; 所使用的 Householder 变换也是复的. 尽管这些变换很复杂, 但依然有计算程序, 属可解模型^[12]. 因此依然没有随机性. 这样, 我们再一次认定 Einstein 的“上帝不掷骰子”是对的.

作为这部分的结尾, 我们说明这里的“可厄米”与第一部分、第 2 节第 (5) 条所提及的“非厄米”之间的差别. 如果退到实矩阵情形, “可厄米”即是“可配称”, 这对应于平衡态统计力学. 于是“非厄米”对应于非平衡态统计力学. 后者的谱在大多数情况下是复的. 从量子的角度看, 这意味着“非厄米”太大, 需加以限制. 这正是第一部分、第 2 节第 (5) 条所提及的“ $\mathcal{PT}$ ”对称性的缘由. 本文所引进的“可厄米”, 乃相应于平衡态统计力学, 虽然还不是拥有实谱的最大类, 但可视为“厄米”的最自然的拓广.

四、微分(Schrödinger、等谱)算子

研究 Schrödinger 算子的两种数学方法

1) 研究 Schrödinger 算子 $L = \frac{1}{2}\Delta + V$ (这是数学写法, 与前面的物理

写法相差一符号)的常用方法是 Feynman-Kac 半群:

$$T_t f(x) = \mathbb{E}_x \left\{ f(w_t) \exp \left[\int_0^t V(w_s) ds \right] \right\},$$

其中 (w_t) 是标准布朗运动, 它常是无界半群. 用它来研究谱性质, 虽有不少工作, 可惜不太成功. 大家知道, Schrödinger 算子为量子力学而生, 今年(2021)已 95 岁. 近百年来, 献给此算子的文献不计其数. 但对于量子力学所关注的谱离散问题, 据我们所知结果并不多. 例如说, 我们没能找到形如定理 5 的判准.

2) 前面已提及的 h 变换提供了研究 Schrödinger 算子的一种新方法:

$$L = \frac{1}{2} \Delta + V \rightarrow \tilde{L} = \frac{1}{2} \Delta + \tilde{b} \cdot \nabla,$$

其中 h 为调和函数: $Lh = 0$, $h \neq 0$ (a.e.). 这样, $L^2(dx)$ 上的 L 等谱于 $L^2(\tilde{\mu}) := L^2(|h|^2 dx)$ 上的 $\tilde{L}$.

现在考虑一般的微分算子. 设 $a = (a_{ij})_{i,j=1}^d$, $b = (b_i)_{i=1}^d$ 和 c 为 $\mathbb{R}^d$ 上的复、而 V 为其上的实函数. 定义 $d\mu = e^V dx$ 及 $L = \nabla(a\nabla) + b \cdot \nabla - c$. 首先是可厄米判准.

定理 7 (陈与李金玉 2020). 考虑 Dirichlet 边界. 算子 L 关于 μ 可厄米当且仅当 $a^H = a$ 及

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} b &= (\operatorname{Re} a)(\nabla V), \\ 2 \operatorname{Im} c &= -((\nabla V)^* + \nabla^*)((\operatorname{Im} a)(\nabla V) + \operatorname{Im} b). \end{aligned}$$

其次是等谱微分算子.

定理 8 (陈与李金玉 2020). 以 $\mathcal{D}(L)$ 表 L 在 $L^2(\mu)$ 中的定义域, 并设 h : $Lh = 0$, $h \neq 0$ (a.e.). 则 $(L, \mathcal{D}(L))$ 与 $(\tilde{L}, \mathcal{D}(\tilde{L}))$ 等谱:

$$\begin{cases} \tilde{L} = \nabla(a\nabla) + \tilde{b} \cdot \nabla, \\ \mathcal{D}(\tilde{L}) = \{ \tilde{f} \in L^2(\tilde{\mu}) : \tilde{f}h \in \mathcal{D}(L) \}; \end{cases}$$

其中

$$\tilde{b} = b + 2 \operatorname{Re}(a) \mathbb{1}_{[h \neq 0]} \frac{\nabla h}{h}, \quad \tilde{\mu} := |h|^2 \mu.$$

文 [11, 13] 分别给出了复三对角矩阵和一维二阶复微分算子的谱离散判准. 显而易见, 此方向上有大量工作等待完成.

结束语 本文将量子力学的基本物理单元从厄米拓展到可厄米 (矩阵或算子), 为观测 (谱) 提供了统一的标架 (生灭矩阵), 这些属量子力学的底层结构. 使用调和函数将带位势项的矩阵或算子的谱转化为不带位势项者, 这为研究带位势项的矩阵或算子的谱理论提供了新途径. 相应地产生了新算法 [12]. 简而言之, 本文提供了可能会有更多应用的量子力学的新架构、新谱论和新算法.

后记 许多朋友可能会感到奇怪, 为何笔者关心起远非本行的量子力学. 其实, 笔者几十年的工作有两条主线: 一是寻找刻画相变的数学工具 (由此进入特征值估计), 源于概率论与统计力学的交叉; 二是华罗庚经济最优化理论的随机模型. 前者可参见 [6, 7], 后者可参见 [7; 第 10 章] 及其中所引文献. 就个人所知, Roland L'vovich Dobrushin 团队是国际上数学从公理化运动回归自然的开拓者 (1960 年代中叶), 我一直非常敬佩他们的胆略. 在我们与统计力学 (着重于非平衡态) 研究做了 10 年之后 (1988 冬), 当我有机会首次访问他们的时候, 我忍不住当面向他请教: 你们开始的时候, 是不是学了许多统计力学. 他一听就笑了, 说: “不是的. 因为我们的目标是重新建立统计力学的数学基础, 所以不需要学很多统计力学”. “当然, 辛钦的《统计力学的数学基础》小册子对我们帮助很大. 还有, 现在国际上已有不少物理学家也懂数学, 所以也给我们很大的帮助”. 你们中许多人可能不知道 Dobrushin, 但可能不少人知道 Yakov Grigor'evich Sinai, 他后来也加入此团队. 本人有幸两次 (1988, 1997) 在莫斯科大学演讲, 分别由他们俩人主持. 他们后来也都当选为美国科学院的外籍院士 (Dobrushin: 1993, Sinai: 1997).

因为 2020 年的 Abel 奖, 使我联想到随机数学近些年所获得的重大奖项: IMU 将首届应用数学 Gauss 奖颁发给 K. Itô (2006); Abel 奖先后三次颁发给本领域学者 Sathamangalam Ranga Iyengar Srinivasa Varadhan (2007), Ya.G. Sinai (2014) 和 Hillel Furstenberg & Grigoriĭ Margulis (2020). 后两人分别于 1989 和 2001 年当选美国科学院院士. 该奖至今共颁奖 18 次. 本领域学者占 1/6. 讲到这里, 我特别感激这五位中的前四位, 他们都曾帮过我. 同时, 不禁想起当年交往的同行中, 已有多位当选美国科学院院士. 这次在网上仔细查证了一下, 除上段所述的两位俄罗斯数学家之外, 在美国的竟还有 6 位之多. Varadhan 和他的好友 Daniel W. Stroock

(我当年访美的导师)于同年 (1995) 当选, Rick Durrett (2007) (曾为我的两本英文专著写过书评, 并曾和我申报过美中合作项目 (1987)), Thomas M. Liggett (2008) (曾为我的第一本英文专著写过书评), Frank L. Spitzer (1981) 和 Harry Kesten (1983). Dobrushin 和 Spitzer 是俄、美两学派的领袖. Dobrushin 和我合作申请了俄中合作项目 (1995 年申报; 1998-99 年执行). 上述 8 人中有 7 人访问过北师大: Spitzer (1984, 45 天), Dobrushin (1988, 45 天), 仅有 Sinai 未能成行. 前四位美国院士访问过我国多次. 我曾写过一篇“感谢老师”的文章, 发表于“百年院庆感怀”, 两文均可在我的主页中找到; 在专著 [6, 7] 中还可找到我们之间交往合作的诸多例证. 这些文章追忆了本人在国内、外许多老师和朋友们那里所受到的熏陶. 我对这些师友们当然感激不尽.

致谢: 笔者以此题应邀在以下单位报告过: 江苏师范大学 (2019 年 6 月), 北京师范大学第十一届优秀大学生数学暑期夏令营 (2019 年 7 月), 中科院数学所 (2020 年 9 月). 笔者衷心感谢下述各位教授: 谢颖超、苗正科、刘伟、王凯顺、唐仲伟、许孝精、张平等的邀请和热情接待. 同时感谢以上各单位的资助. 作者还感谢本刊编辑的许多宝贵建议, 提升了本文的可读性.

本项研究得到国家自然科学基金委(项目号: 11771046, 12090011)、国家重点研发计划(项目号: 2020YFA0712900)、教育部“双一流”建设学科和江苏高校优势学科建设工程的资助.

参考文献

- [1] Accardi, L., Lu, Y.G., Volovich, I. (2002). *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*. Springer.
- [2] Aebi, R. (1996). *Schrödinger Diffusion Processes*. Birkhäuser Verlag.
- [3] Born, M., Heisenberg, W., and Jordan, P. (1926). *Zur Quantenmechanik*. II [矩阵力学 II]. *Zeitschrift für Physik* vol. 35: 557 – 615 (in German).
- [4] Born, M. and Jordan, P. (1925). *Zur Quantenmechanik* [矩阵力学]. *Zeitschrift für Physik* [物理学杂志] 34: 858 – 888.
- [5] Casado, C.M.M. (2008). *A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics*. *Latin-Amer. J. Phys. Educ.* 2(2): 152–155.
- [6] Chen, M.F. (2004). *From Markov Chains to Nonequilibrium Particle Systems*, 2nd ed. World Sci, Singapore.
- [7] Chen, M.F. (2005). *Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory*. Springer.
- [8] Chen, M.F. (2010). *Speed of stability for birth–death processes*. *Front. Math. China* 5(3): 379–515.

- [9] Chen, M.F. (2014). *Criteria for discrete spectrum of 1D operators*. Commu. Math. Stat. 2(3/4): 279–309.
- [10] Chen M.F. (2018). *Hermitizable, isospectral complex matrices or differential operators*. Front Math China 13(6): 1267–1311.
- [11] Chen M.F. (2020). *On spectrum of Hermitizable tridiagonal matrices*. Front. Math. China 15(2): 285–303.
- [12] Chen, M.F., Jia, Z.G., Pang, H.K. (2021). *Computing top eigenpairs of Hermitizable matrix*. Front. Math. China 16 (2): 345–379.
- [13] Chen, M.F. and Li, J.Y. (2020). *Hermitizable, isospectral complex second-order differential operators*. Front. Math. China 15(5): 867–889.
- [14] Chen, M.F., Li, Y.S. (2019a). *Development of powerful algorithm for maximal eigenpair*. Front Math China 14(3): 493-519.
- [15] Chen, M.F., Li, Y.S. (2019b). *Improved global algorithms for maximal eigenpair*. Front. Math. China 14(6): 1077–1116.
- [16] Chen, M.F. and Zhang, X. (2014). *Isospectral operators*. Commu Math Stat 2(1): 17–32.
- [17] Dirac, P.A.M. (1925). *The fundamental equations of quantum mechanics*. Proceedings of the Royal Society of London A109, 642-653.
- [18] Dirac, P.A.M. (1930-1981). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford Univ Press, 1st 1930, 4th 1958, New as paperback 1981.
- [19] Eckart, C. (1926). *Operator Calculus and the Solution of the Equation of Quantum Dynamics*. Physical Review 28(4): 711-726.
- [20] Fukushima, M. and Okada, M. (1987). *On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions*. Acta Math. 159(3/4): 171 – 213.
- [21] Heisenberg, W. (1925). *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* [关于运动学和动力学关系的量子论解释]. Zeitschrift für Physik 33: 879-893 (in German).
- [22] Jordan, T.F. (1986). *Quantum Mechanics in Simple Matrix Form*. Wiley-Interscience.
- [23] Kolokoltsov, V.N. (2011). *Markov Processes, Semigroups and Generators*. De Gruyter.
- [24] Laloë, F. (2019). *Do We Really Understand Quantum Mechanics?* 2012 1st ed., 2019 2^{ed} ed. Cambridge Univ. Press.
- [25] Lawler, G.F. (2005). *Conformally Invariant Processes in the Plane*. Amer. Math. Soc.
- [26] Ludyk, G. (2018). *Quantum mechanics in matrix form* (undergraduate lecture notes in physics). Berlin: Springer.

- [27] Maslov, V.P. (1976). *Complex Markov Chains and Functional Feynman Integral*. Moscow, Nauka (in Russian).
- [28] McCrimmon, K. (2004). *A Taste of Jordan Algebra*. Springer.
- [29] Moiseyev, N. (2011). *Non-Hermitian quantum mechanics*. Cambridge Univ. Press.
- [30] Nagasawa, M. (1993). *Schrödinger Equations and Diffusion Theory*. Basel: Birkhäuser.
- [31] Nagasawa, M. (2000). *Stochastic Processes in Quantum Physics*. Springer Basel AG.
- [32] K. R. Parthasarathy, K.R. (1992). *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*. Springer Basel AG.
- [33] Schrödinger, E. (1926). *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules*. Phys. Rev. 28(6): 1049–1070 [乃当年作者几篇文章的综述].
- [34] Schrödinger, E. (1926). *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen* [关于 Heisenberg-Born-Jordan 的量子力学与 Schrödinger 的之间的关系]. Annalen der Physik 384(8): 734-756 (in German).
- [35] Schrödinger, E. (1931). *Über die Umkehrung der Naturgesetze*. *Sitzungsberichte der preussischen Akad. der Wissenschaften Physicalisch Mathematische Klasse*, 144-153 (in German). [关于自然规律的逆转. 普鲁士科学院会议报告. 物理数学科学]
- [36] Schrödinger, E. (1932). *Sur la théorie relativiste de l'électron et l'interprétation de la mécanique quantique*. Ann. Inst. H. Poincaré 2(4): 269-310 (in French). [关于电子的相对论和量子力学的解释. H. Poincaré 研究所纪事]
- [37] Shabnam, S. (2019). *Quantum mechanics: a simplified approach*. CRC Press.
- [38] Van Waerden, B.L. (1968). *Sources of quantum mechanics*. Dover Publ. Inc.
- [39] Von Neumann, J. (1932-2018). *Mathematical foundations of quantum mechanics*. German edition 1932, English edition 1955, New TeX-edition, 2018. Princeton Univ. Press.

The author's papers (since 1993) are collected in the collections vols. 1–4 at the homepage <http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf>

A new mathematical perspective of quantum mechanics

Mu-Fa Chen

(Research Inst. Math. Sci., Jiangsu Normal Univ., 221116;
School of Math. Sci., Beijing Normal Univ., 100875;
Key Lab. Math. & Complex Sys., Ministry Edu., BNU)

Abstract In the study of the algorithm, we encounter the following problems: besides the real symmetric matrices or complex Hermite ones, what is the larger class of matrices having real spectrum? The latter is one of the two characteristics of quantum mechanics; the other one is the volatility. The well-known “centennial war” is about whether the solution of wave equation exists “randomness”. We will introduce the explorations of the past few years with an unexpected result. It should be noted that many branches of modern mathematics originate from quantum mechanics. It can be imagined that the new perspective touches on more than just a few small topics.

Keywords Statistical physics; quantum mechanics; Hermitizable matrix, new spectral theory