

综述报告

概率论的进步*

陈 木 法

(北京师范大学数学科学学院; 北京师范大学数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京, 100875)

摘 要: 本文是笔者关于概率论进展专题所写的第4文. 前3文见 [1], [2], [5]. 这里, 先简要介绍十年来概率论走向成熟的若干标志性事件; 介绍这个相对年轻数学学科的成长点滴. 然后结合个人经历, 着重介绍十年来概率论与统计物理及数学其它学科分支的交叉渗透的若干成果. 本文并非学科综述, 而只是希望通过一、两个侧面, 展示概率论的发展和进步.

关键词: 概率论; 统计物理; 核心数学; 谱理论; 特征值计算

中图分类号: O211

英文引用格式: Chen M F. Progress of probability theory [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2017, 33(5): 538-550. (in Chinese)

§1. 概率论的成熟与成长

作为概率论成熟的标志, 这里列出三个奖项.

Gauss 奖 2006年, 日本概率学家 Kiyoshi Itô (伊藤清: 1915-2008) 荣获首界 Carl Friedrich Gauss (高斯) Prize, 这是由国际数学家联盟 (IMU) 和德国数学会联合设立的应用数学大奖.

获奖颂词: The prize honors his achievements in **stochastic analysis**, a field of mathematics based essentially on his groundbreaking work.

大家知道, 一个随机变量的最简单的刻画是其平均值与反映随机波动的方差. 在非随机情形, 对于普通函数 $b(s)$, 微积分的基本公式给出

$$\int_0^t b(s)db(s) = \frac{1}{2}[b(t)^2 - b(0)^2].$$

但若将 $b(s)$ 换成布朗运动 $\{B(s)\}_{s \geq 0}$, 则基本公式多出一项:

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}[B(t)^2 - B(0)^2] - \frac{1}{2}t.$$

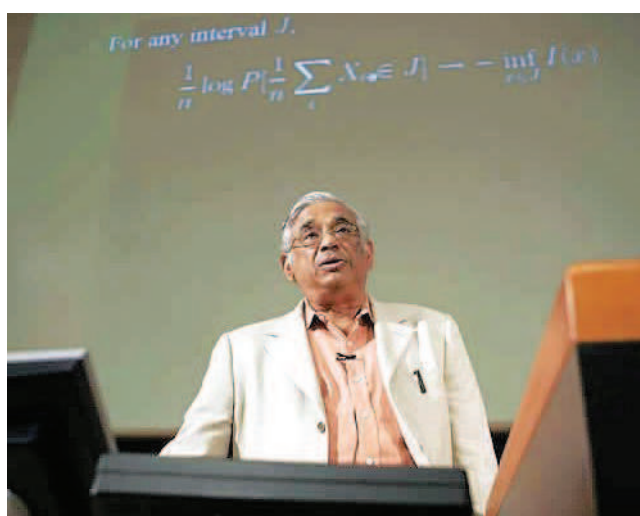
*国家自然科学基金项目 (批准号: 11131003、11626245)、教育部 973 项目和江苏高校优势学科建设工程项目资助.
本文 2017 年 5 月 9 日收到.



当年 IMU 主席 J. Ball 到日本亲手将奖牌送到正在住院的 K. Itô 手中

右方的第二项来源于布朗运动的二次变差. 这是 Itô 于 1942 年首先给出的公式. 他的奠基作发表在日本的一份油印的数学杂志上. 到 2006 年获奖, 期间经历了 64 年. 他对我国非常友好, 1980 年前后, 不仅他本人、而且还派他的好几位大将来华讲学. 应当说, 我国概率论能有今天, 他是功不可没的. 记得当年 (1983 年?) 我曾有一机会向他汇报工作, 讲完之后, 他跟我要抽印本, 我很惭愧地说, 我的文章大多是中文. 他表示很可惜, 说: 要尽量用英文写, 以便于交流, 我觉得你用英文写不会有太多困难. 自此以后, 我的大部分学术著作都是英文了. 他还跟我们说过: 我们东方人别像西方人那样, 写作很粗, 喜欢跳, 我们要一步一步写清楚.

Abel 奖 2007 年, 印度裔美国概率学家 Srinivasa S.R. Varadhan (1940 –) 荣获 Niels Henrik Abel 奖 (挪威王室授).



Srinivasa S.R. Varadhan (1940 –)

获奖颂词: Fundamental contributions to **probability theory** and in particular for creating a unified **theory of large deviations**.

在 1975 – 1983 年间, 他与 M.D. Donsker 一起, 以 “Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time” 为总标题, 连续发表了 4 篇长文, 奠定了大偏差理论的基础, 随后得到非常广泛的应用. 简单地说, 大偏差理论的目标是刻画指数式收敛的收敛指数. 从理论的提出到 2007 年获奖, 期间经历了 42 年.

Varadhan 多次访问我国, 与我国学者有很多交往. 我曾于 1984 年收到他所赠送的当年出版的名著《Large Deviations and Applications》. 记忆很深的是他曾跟我讲起当年他们 4 位研究生同学一起组织讨论班的事情. 非常震惊这些人都成了当代的一流科学家 (我与他们 4 人中的 3 人交往过). 关于他的更多故事, 可参见台北中研院的《数学传播》所作的专访 (32 卷 1 期, 2008).

应当说, 这两个奖项都是纯概率的; 下一个奖项大多属于概率论与其它学科的交叉.

Fields 奖 在国际数学家大会 (ICM) 上所颁发的 Fields 奖, 是奖励年轻数学家 (40 岁以下) 的一项大奖. 2006 年之前, 就我们所知, 无概率学者获此殊荣. 自 2006 年开始, 每届都有概率学者获奖. 下表中 $x/4$ 表示 4 位获奖人中有 x 人是概率的.

ICM 年份	概率学者获奖比例
ICM 2006	2.5/4
ICM 2010	2.5/4
ICM 2014	1/4

这些故事都发生在最近十年, 也许有点奇怪, 因为概率论的起源 (如赌博) 已有很长的历史. 然而, 概率论成为数学家族的正式成员却是很晚的事. 这期间, William Feller 的两卷本名著《An Introduction to Probability Theory and its Application》发挥了巨大作用.



William Feller (1906 – 1970)'s vivid lecturing at IBM

如同他多次所指出的那样, 在他的著作问世之前, 概率论除在前苏联之外, 尚未被数学界普遍认可.

Preface to the Third Edition (of Volume 1):

WHEN THIS BOOK WAS FIRST CONCEIVED (MORE THAN 25 YEARS AGO) few mathematicians outside of the Soviet Union recognized probability as **legitimate** [合法的, 正当的] **branch** of mathematics. 1967

Preface to the First Edition (of Volume 2):

AT THE TIME THE FIRST VOLUME OF THIS BOOK WAS WRITTEN (BETWEEN 1941 AND 1948) the **interest in probability was not yet widespread** [流行; 普遍的]. 1965

这两本专著都有中译本:《概率论及其应用》. 卷 1: 胡迪鹤译; 卷 2: 郑元禄译 (记得先前还有刘文的译本). 1966 年春, 严士健老师就让我自学胡先生所译的卷 1 的上半部. Feller 的研究成果对我们有很大影响. 本人 1986 年出版的研究专著《跳过程与粒子系统》(北京师大出版社), 书中第 8 章的标题就是 Feller 边界.

其实, 当代概率论应当从 1933 年算起, 当年 A.N. Kolmogorov 创建了概率论的第一个公理系统 (德文版); 其英译 (1950 1st ed., 1956 2nd ed.) 书名为《Foundations of the Theory of Probability》. 中译本《概率论基本概念》(1952), 王寿仁译.



Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987)

我至今依然十分惋惜没能见到这位伟人, 我首访莫斯科大学是他过世一年后的 1988 年.

廿世纪以来的现代数学, 可以粗略地分为前半世纪的 Hilbert 公理化时代和后半世纪的 Poincaré 回归自然时代. 对于概率论而言, 前一时代大体上为 1933 – 1965 年. 这期间形成了概率论的三大学科分支, 这里列举几位代表性概率学家 (挂一漏万).

- 极限理论. B. Gnedenko and A.N. Kolmogorov (1954); 许宝騄.

- 平稳过程. A.N. Kolmogorov (1941); 江泽培.
- 马氏过程. J. Doob (1953); K.L. Chung (1960); E.B. Dynkin (1965); 王梓坤 (1965) 等.

如华罗庚先生所说, 许宝騄先生是中国概率统计的总司令. 他在统计、概率极限理论和马氏过程等多方面都有不朽的贡献. 本人 1986 年关于跳过程转移函数的可微性就是他 1958 年文章的继续. 江泽培先生和王梓坤先生分别是我国平稳过程和马氏过程之父. 他们两位都是 1950 年代在前苏联获得副博士学位. 王先生的导师就是 Kolmogorov, 具体指导的是马上要讲到的 Dobrushin.

§2. 概率论与统计物理的交叉渗透

概率论回归自然的标志应当是 R.L. Dobrushin 的三项工作.

- The existence conditions of the configuration integral of the Gibbs distribution, 1964.
- Methods of the theory of probability in statistical physics, 1964, Winter School.
- Existence of a phase transition in the two-dimensional and three-dimensional Ising models, 1965.

笔者对于当年他们创建概率论与统计物理的交叉学科——随机场非常敬佩, 因为这两个学科毕竟相距甚远. 我不知道他们花费了多少年的摸索. 1988 年, 我曾询问 Dobrushin, “你们开始时是否学了许多统计物理?” 没想到他的回答是否定的: “我们的目标是重新建立统计力学的数学基础, 因此并不需要太多的物理准备.” “当然, (A.Ya) Khinchin 的小册子《Mathematical Foundations of Statistical Mechanics》很有帮助”, “还有国外的一些现代物理学家也给了我们很多帮助.” 可想而知, 当年 Khinchin 写他的小册子时是花了功夫的. 由此联想到科学的传承. 前苏联的许多数学杂志, 几乎每期都有纪念他们资深数学家的文章. 刚刚查到包括 Itô 著名论文的油印杂志《全国纸上数学谈话会》(1934–1949) 都已扫描放到网上 [<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/shijodanwakai/>]; 前波兰的许多数学杂志也如此. 然而, 今天你如果问一问我国数学系的学生, 有没有人知道“优选法”, 回答近乎零. 我们相信, 科学传承的丧失不仅可悲而且对未来会有极大影响. 在与 Dobrushin 的好友 Robert A. Minlos 共同回顾他们当年的历程时, 他不无自豪地说: “开始时仅有一个结果已知, 即自由能总存在.”

1995–1997 年, 我和 Dobrushin 共同组织了由两国自然科学基金资助的研究项目, 双方曾有很多交往. 我在莫斯科大学作过两次演讲. 1997 年由 Ya. Sinai 主持. 1988 年由 Dobrushin 主持. 我的第一本英文专著也是当年由后者推荐出版的. 当年秋天, 他访问南开和我校共 45 天. 我于 12 月回访他. 记得他在冰天雪地里带我跑了莫斯科的许多书店, 买了不少旧俄文数学书, 然后带我去一家餐厅吃午饭. 他很高兴地告诉我, 这是莫斯科的第一家私人餐厅……在我的主页上, 可找到我对他的一篇纪念文章.

自 1964 年概率论回归自然之后, 出现了许许多多新的学科分支. 例如有

- Random fields (1964).



Roland Lvovich Dobrushin (1929 – 1995)

1988 年参观长城和十三陵时的留影

- Interacting particle systems. R.L. Dobrushin, F. Spitzer (1970), R. Holley, R. Durrett, T.M. Liggett, D.W. Stroock et al.
- Percolation. H. Kesten (1982): Percolation Theory for Mathematicians. Birkhäuser Verlag, Boston.
- Large deviations, Malliavin calculus, stochastic differential geometry, quantum probability, Euclidean quantum field theory, free probability, Dirichlet forms, mathematical finance, stochastic PDE, etc.

Random fields (随机场) 和 Interacting particle systems (交互作用粒子系统) 是两个姐妹学科, 前者时间离散, 后者连续; 这好比差分方程与微分方程之间的联系. 关于随机场, 有以 Dobrushin 为首的俄罗斯学派, 关于交互作用粒子系统, 有以 Spitzer 为首的美国学派, 其主要成员是上面 Spitzer 及之后所列的 5 位. 我从他们那里得到过难于一一描述的巨大帮助. 应当特别指出的是: 从 1981 年底至 1983 年春, 我有幸访问 Colorado 大学的 Stroock 和 Holley 两位教授, 跟 Stroock 学习了 Malliavin calculus 和 Large deviations 两个刚兴起不久的新研究方向. 回国后在我们的讨论班上讲了连续三个学期, 对于我们学科发展产生了深远的影响. 与此紧密相关的有 Measure-valued processes, 这是我们概率论研究团队的主攻方向之一, 在国际上有以加拿大 D.A. Dawson 为首的多国研究团队.

在 1977 年之前, (经典) 统计物理研究的主要是平衡态 (所谓平衡态, 有点像演电影, 往前放映或往后倒都行). 典型的是 Ising 模型. 大约 1978 年 (当年 I. Prigogine 获 Nobel 奖) 之后, 统计物理进入非平衡态研究 (人体是非平衡态的一个代表; 除了内部的运动之外, 它与外部有能量交换: 既要吃、又要拉). 从 1977 年开始, 在北京师大组织起了非平衡统计物理的数、理、化联合讨论班. 我的导师严士健教授是此研究小组的成员之一. 基于这个基础与我在之前跟随我的另一位导师侯振挺教授研究马尔可夫链的经历, 1988 年夏, 在我

研究生面试前夕,严老师跟我商量开展这个新方向的研究.从那时候起,我们开始一起探讨非平衡统计物理的数学机制.

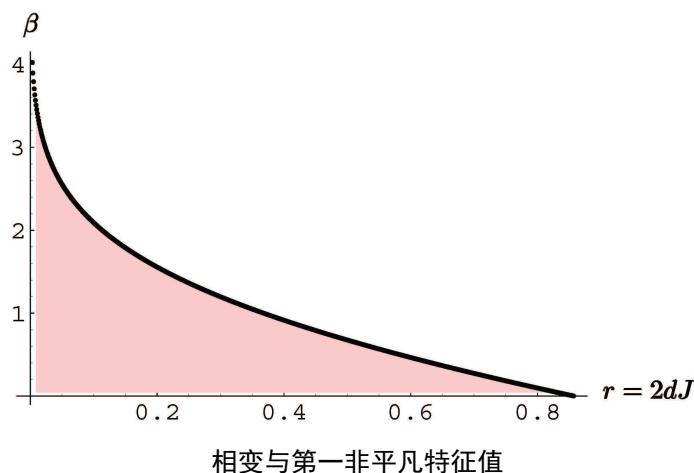
从数学上讲,平衡态系统对应于自共扼算子.这样,非平衡态系统对应于非自共扼算子.众所周知,统计物理的核心课题是相变现象.如水在常温下是液态,低温下变固态,高温下变气态.为研究这个课题,需要研究无穷维数学模型,因为有限维系统不可能产生相变.粗略地讲,我们的无穷维数学模型是由无穷多个方程组成的方程组.各方程之间有交互作用,我们的“无穷”含有几何结构.而研究无穷维的典型手法是通过有限维逼近.然而,即使是二维情形,概率论中已有的存在唯一性判别准则不可用,这就带来了严重的挑战.

概率论与非平衡统计物理的交叉 我们在此方向上工作了 15 年.

- 有限维模型解的存在唯一性? 从 1978 年到 1983 年,经历了 5 年才解决.
- 为从有限维过渡到无穷维,使用并发展了耦合 (coupling) 方法.形成了耦合三部曲: 马氏耦合,最优马氏耦合,距离关于耦合的优化.
- 完成了保序性(随机可比性)判别准则.
- 形成了无穷维反应扩散过程这一典型的非平衡系统的较完整的理论,构成了专著 [3] 的第 IV 部分 (顺便指出,这类随机过程是笔者于 1985 年命名的).

其后的发展见 [4]. 文献 [8] 基于一位荷兰学者的工作,得出笔者 1986 年所发表的抽象空间上的 Q 过程唯一性的强有力的、实用的充分条件在离散空间的特殊情形下也是必要的.

§3. 概率论与其它数学分支的交叉渗透



大约 1988 年,我们获悉可用第一非平凡特征值来刻画相变.如图所示,曲线表特征值为零,下方为正,即是指遍历 (当然无相变) 区域;曲线上方特征值为零,存在多相,因而是相变的区域.

想当年,得到这个想法时很激动.因为研究无穷维数学缺少工具.以为有了特征值工具,就可以做许多事情.可惜,事情远非如此简单.让我们从简单情形开始.考虑三对角矩

阵

$$Q = \begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1 + b_1) & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & -(a_2 + b_2) & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $a_i > 0, b_i > 0$. 显见 $Q\mathbf{1} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{1}$, 这里 $\mathbf{1}$ 为元素均为1的列向量. 于是有平凡特征值: $\lambda_0 = 0$. 问题是: $-Q$ 的下一个特征值为何 $\lambda_1 = ?$

人们常说“实践出真知”, 要“在游泳中学会游泳”. 我们觉得, 学数学的最好方法是做数学. 我习惯于从最简单情形开始. 为大家一个具体的印象, 这里复述本人在 ICM 2002 上报告过的四个例子 (也见 [4]).

例 1 平凡情形 (两点). 两参数 $a, b > 0$.

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = a + b.$$

此时 λ_1 很好, 它随每一参数的增加而增加! 然而, 这么漂亮的东西仅此而已, 三点就不对了.

例 2 三点. 四参数: b_0, b_1, a_1, a_2 .

$$\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & -(a_1 + b_1) & b_1 \\ 0 & a_2 & -a_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 2^{-1} [a_1 + a_2 + b_0 + b_1 - \sqrt{(a_1 - a_2 + b_0 - b_1)^2 + 4a_1b_1}].$$

例 3 四点. 六参数: $b_0, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3$.

$$\lambda_1 = \frac{D}{3} - \frac{C}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{2^{1/3}(3B - D^2)}{3C},$$

其中

$$D = a_1 + a_2 + a_3 + b_0 + b_1 + b_2,$$

$$B = a_3 b_0 + a_2 (a_3 + b_0) + a_3 b_1 + b_0 b_1 + b_0 b_2 + b_1 b_2 + a_1 (a_2 + a_3 + b_2),$$

$$C = (A + \sqrt{4(3B - D^2)^3 + A^2})^{1/3},$$

$$\begin{aligned} A = & -2a_1^3 - 2a_2^3 - 2a_3^3 + 3a_3^2 b_0 + 3a_3 b_0^2 - 2b_0^3 + 3a_3^2 b_1 - 12a_3 b_0 b_1 \\ & + 3b_0^2 b_1 + 3a_3 b_1^2 + 3b_0 b_1^2 - 2b_1^3 - 6a_3^2 b_2 + 6a_3 b_0 b_2 + 3b_0^2 b_2 \\ & + 6a_3 b_1 b_2 - 12b_0 b_1 b_2 + 3b_1^2 b_2 - 6a_3 b_2^2 + 3b_0 b_2^2 + 3b_1 b_2^2 - 2b_2^3 \\ & + 3a_1^2 (a_2 + a_3 - 2b_0 - 2b_1 + b_2) + 3a_2^2 [a_3 + b_0 - 2(b_1 + b_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3a_2[a_3^2 + b_0^2 - 2b_1^2 - b_1b_2 - 2b_2^2 - a_3(4b_0 - 2b_1 + b_2) + 2b_0(b_1 + b_2)] \\
& + 3a_1[a_2^2 + a_3^2 - 2b_0^2 - b_0b_1 - 2b_1^2 - a_2(4a_3 - 2b_0 + b_1 - 2b_2) \\
& + 2b_0b_2 + 2b_1b_2 + b_2^2 + 2a_3(b_0 + b_1 + b_2)].
\end{aligned}$$

现在, 这六个参数对于 λ_1 的贡献就完全糊涂了. 众所周知, 多于五个点时, 就无解析解了. 因此, 在一般情况下, 没有指望得到 λ_1 的显式解!

下面转入 λ_1 的估计, 我们考察简单的线性情形的摄动.

例 4 无穷三对角矩阵 (生灭过程).

$b_i (i \geq 0)$	$a_i (i \geq 1)$	λ_1	特征函数 g 的阶
$i + \beta (\beta > 0)$	$2i$	1	1
$i + 1$	$2i + 3$	2	2
$i + 1$	$2i + (4 + \sqrt{2})$	3	3

这里, 特征函数都是多项式, 其阶即是其度数. 由此例可见, 一般而言, 要估计 λ_1 太难! 那真是手无寸铁、走投无路! 所以我们开始访问其它数学分支: 矩阵特征值计算、分析、黎曼几何等. 我关于此课题的第一篇文章 (1991) 针对这类生灭过程, 证明了这里的 λ_1 重合于指数遍历性速度, 而关于后者已知有两个半经典模型, 可算出精确的 λ_1 . 大约在 1992 年, 我们发现黎曼几何关于 λ_1 有很漂亮的成果, 又发现使用我们的概率方法, 也可以研究同一问题, 所以很快做出成果. 但真正对几何做出贡献是在 3 年之后, 发现了全新的变分公式 (与王风雨合作). 在 2000 年, 使用调和分析中的 Hardy 不等式, 我们首次得出包括这里的三对角矩阵的一维情形 λ_1 正性的判别准则. 反过来, 我们真正对 Hardy 不等式的贡献要等到 13 年之后的 2013 年. 由此不难想象, 为寻求这个问题的理论解答, 我们经历了漫长的岁月. 在介绍理论结果之前, 让我们看看最新的数值结果.

在计算数学里, 计算矩阵 (非对角线元素非负) 的最大特征对 (特征值及所对应的特征函数) 有两种算法.

- 幂法 (Power iteration). 给定 v_0 , 假定它在 g 方向上的投影非 0, 定义

$$v_k = \frac{Av_{k-1}}{\|Av_{k-1}\|}, \quad z_k = v_k^* Av_k,$$

此处 v^* 是 v 的转置向量, $\|v\|$ 为 v 的 ℓ^2 距离;

- Rayleigh 商迭代 (quotient iteration). 给定 $(g, \lambda_{\max}(A))$ 的近似值 (v_0, z_0) , 定义

$$v_k = \frac{(A - z_{k-1}I)^{-1}v_{k-1}}{\|(A - z_{k-1}I)^{-1}v_{k-1}\|}, \quad z_k = v_k^* Av_k,$$

则 $v_k \rightarrow g$ 且 $z_k \rightarrow \lambda_{\max}(A)$.

例 5 在上述 Q 矩阵中, 取 $a_{k+1} = b_k = (k+1)^2$ 并取 8 价主对角子矩阵, 则使用幂法需要 990 次迭代, 才能达到 0.525268 的精度. 下面转用 Rayleigh 迭代法. 下表的数值计算是我的一名硕士生 (李月爽) 使用 MatLab 在笔记本电脑上完成的, 它完全超乎了我的想像. 所有的计算都是两步迭代完成, 计算时间都不超过 30 秒 (详见 [10]).

矩阵的阶	z_0	z_1	$z_2 = \lambda_0$	λ_0 的上、下界之比
8	0.523309	0.525268	0.525268	$1+10^{-11}$
100	0.387333	0.376393	0.376383	$1+10^{-8}$
500	0.349147	0.338342	0.338329	$1+10^{-7}$
1 000	0.338027	0.327254	0.32724	$1+10^{-7}$
5 000	0.319895	0.30855	0.308529	$1+10^{-7}$
7 500	0.316529	0.304942	0.304918	$1+10^{-7}$
10^4	0.31437	0.302586	0.302561	$1+10^{-7}$

此表表明, 对于各种阶数的矩阵, 甚至于达到一万阶, 使用 Rayleigh 迭代法从第二步开始, 输出结果就都一样了. 这可从表中的第一行看出. 那里的计算实际上可在第一步结束. 然而, 这种迭代法实际上非常危险: 倘若初值偏了一小点, 就可能掉入陷阱 (N 阶方阵可能有 $N-1$ 个陷阱). 表中的最后一列是根据第二步输出的 v_2 , 从理论上算出其特征值估计的上、下界之比, 精确度达到 10^{-7} . 这不仅说明我们倒数第二列的结果是可靠的, 而且六位小数全部是精确的. 关于此专题的最新进展, 可在笔者的主页 (地址见文末) 上找到.

在这里, 关键是我们有高效的理论初值 (v_0, z_0) , 其中 z_0 取为

$$z_0 = \frac{7}{8}\delta_1^{-1} + \frac{1}{8}v_0^*(-Q)v_0,$$

而右方的关键一项是下面马上要讲到的 δ_1^{-1} , 它是 λ_0 的下界估计, 为得到这个估计, 我们事先找到其特征向量的模拟 v_0 . 可惜这里限于篇幅, 我们不能一一写出完整的显式表达式.

下述结果开始于 1988 年, 完成于 2010–2014 年间.

定理 6 (非正式! 详见 [9]) 对于有限或无限的非对角线元素非负的对角矩阵, 可分为 20 种情形. 在每一种情况下, 都存在 $\delta, \delta_1, \delta'_1$ (然后依次有 δ_n 和 δ'_n) 使得 $\delta_n \downarrow, \delta'_n \uparrow$ 而且

$$(4\delta)^{-1} \leq \delta_n^{-1} \leq \lambda_0 \leq \delta'_n{}^{-1} \leq \delta^{-1}, \quad n \geq 1.$$

此外, $1 \leq \delta'_1{}^{-1}/\delta_1^{-1} \leq 2$.

上述数值例子所用到的 δ_1 只是这里的 20 种情形中的一种. 这个定理对于一维二阶椭圆算子完全平行. 现在, 我们简略谈谈椭圆算子情形此定理的部分解答.

考虑直线上的区间 $E = (-M, N)$, $M, N \leq \infty$. 对于给定的二阶微分算子 L , 有

$$\text{特征方程: } Lg = -\lambda g, \quad g \neq 0.$$

为方便起见, 定义编码 ‘D’ 和 ‘N’,

$$\text{D: Dirichlet (吸收) 边界 } g(-M) = 0, \quad \text{N: Neumann (反射) 边界 } g'(-M) = 0.$$

当然, 如果 $M = \infty$, 则 $g(-M) := \lim_{M \rightarrow \infty} g(-M)$. 使用这两个编码, 可将边界分为四类. 于是我们就有四类特征值问题.

- λ^{NN} : 在 $-M$ 和 N 处均为 Neumann 边界.

- λ^{DD} : 在 $-M$ 和 N 处均为 Dirichlet 边界.
- λ^{DN} : 在 $-M$ Dirichlet 而在 N 处 Neumann.
- λ^{ND} : 在 $-M$ Neumann 而在 N 处 Dirichlet.

为陈述我们的基本定理, 还需定义两个测度. 假设所给定的算子是

$$L = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}, \quad a > 0.$$

命 $C(x) = \int_{\theta}^x b/a$, 其中 $\theta \in (-M, N)$ 为参考点, 测度 dx 略去不写. 所需的两个测度是 μ 和 $\hat{\nu}$ 分别定义为

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{e^C}{a}, \quad \frac{d\hat{\nu}}{dx} = e^{-C}.$$

定理 7 (见[7]) 对于上述四种边界条件的每一种 $\#$, 我们都有统一的估计: $(4\kappa^{\#})^{-1} \leq \lambda^{\#} \leq (\kappa^{\#})^{-1}$, 其中 $\mu(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} d\mu$,

$$(\kappa^{\text{NN}})^{-1} = \inf_{x < y} \{ \mu(-M, x)^{-1} + \mu(y, N)^{-1} \} \hat{\nu}(x, y)^{-1},$$

$$(\kappa^{\text{DD}})^{-1} = \inf_{x \leq y} \{ \hat{\nu}(-M, x)^{-1} + \hat{\nu}(y, N)^{-1} \} \mu(x, y)^{-1},$$

$$\kappa^{\text{DN}} = \sup_{x \in (-M, N)} \hat{\nu}(-M, x) \mu(x, N),$$

$$\kappa^{\text{ND}} = \sup_{x \in (-M, N)} \mu(-M, x) \hat{\nu}(x, N).$$

特别地, $\lambda^{\#} > 0$ 当且仅当 $\kappa^{\#} < \infty$.

也许不是一眼就能看出来, 这条定理确有美感. 首先, 共有的因子 4 是普适的, 与模型无关; 所有常数都只用两个测度 μ 和 $\hat{\nu}$ 表示出来; 前两个常数关于它的左、右边界对称; 四个常数之间拥有简明的对偶法则: 如同时将两编码 ‘D’ 和 ‘N’ 对换, 相应的常数表达式中只需将两个测度 μ 和 $\hat{\nu}$ 对换; 如将头两个常数的表达式右方的加项去掉第二项, 便可得出后两个常数. 应当说, 这四个断言中仅有头两个是新的, 后两个则是已知的. 例如第三个, 从 Hardy 1920 年开始, 这里的答案是半个世纪之后的 1972 年才找到的; 而要得到前两条, 差不多又等待了 40 年. 为证明第一项断言, 我们使用了现代概率论的三个重要工具: 耦合方法, 对偶技术和容度理论, 经过 5 步论证才完成的. 毫无疑问, 这个成果是十分珍贵的.

让我们再重复一遍, 对于上述的三对角矩阵情形, 结果是完全平行的. 为说明我们研究这个主题的原始动机, 我们需要一点抽象概念. 首先是 L^2 指数稳定性. 设 π 为某可测空间上的概率测度, $L^2(\pi)$ 为 π 平方可积的实函数的全体, 其范数和内积分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot, \cdot)$. 假定 L 自共轭: $(f, Lg) = (Lf, g)$. 其半群可形式上写成 $P_t = e^{tL}$. 下式表示 L^2 指数稳定性:

$$\|P_t f - \pi(f)\| \leq \|f - \pi(f)\| e^{-\varepsilon t}, \quad \pi(f) := \int f d\pi,$$

那么, $\varepsilon_{\max} = \lambda^{\text{NN}} := \lambda_1$. 与此紧密相关的是关于相对熵的指数稳定性.

$$\text{Ent}(P_t f) \leq \text{Ent}(f) e^{-2\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

此处

$$\text{Ent}(f) := H(\mu \parallel \pi) = \int_E f \log f d\pi, \quad \text{若 } \frac{d\mu}{d\pi} = f.$$

为简单记, 以后就用 σ 表示使前一式子成立的最大者 $\sigma_{\max}$.

我们要研究的是 φ^4 Euclidean quantum field on the lattice. 考虑格子 $\mathbb{Z}^d$ 上的自旋系统: 其组态为 $\{x_i \in \mathbb{R} : i \in \mathbb{Z}^d\}$. 在每一位置 $i \in \mathbb{Z}^d$ 上, 有一自旋, 其势为 $u(x_i) = x_i^4 - \beta x_i^2$, 交互作用势为紧邻的: $H(x) = -2J \sum_{\langle ij \rangle} x_i x_j$, $J, \beta \geq 0$, $\langle ij \rangle$ 表示 $\mathbb{Z}^d$ 上的紧邻边. 这样, 这个无穷维随机过程的算子可写成

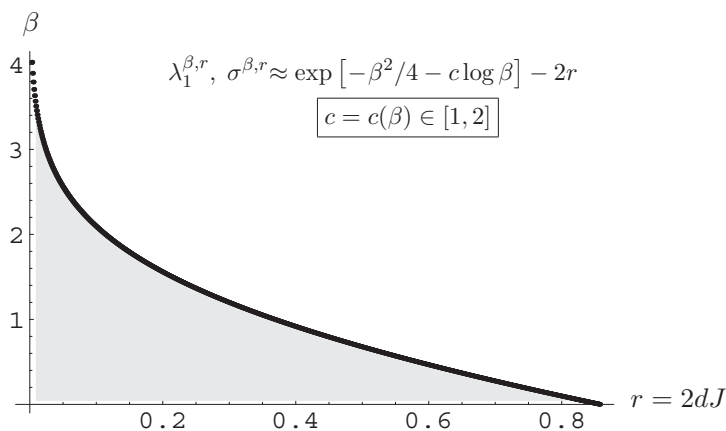
$$L = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} [\partial_{ii} - (u'(x_i) + \partial_i H) \partial_i].$$

我们以 $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ 表 Λ 为 $\mathbb{Z}^d$ 的有限子集. 下面是我们的主要结果.

定理 8 (见 [6]) 关于 $\beta \gg 1$, 我们有如下关于有限盒子 Λ 和边界条件 ω 一致的渐进性质

$$\inf_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d} \inf_{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \lambda_1^{\beta, J}(\Lambda, \omega) \approx \inf_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d} \inf_{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \sigma^{\beta, J}(\Lambda, \omega) \approx \exp[-\beta^2/4 - c \log \beta] - 4dJ,$$

其中 $c \in [1, 2]$ 为常数. 这里的主阶 $-\beta^2/4$ 是精确的.



以上这些工作展示了我们在研究无穷维模型中逐步开发出一批研究无穷维数学的重要工具: 主特征值估计, 对数 Sobolev 不等式, 耦合方法和对偶技术等. 同时展示了概率论与统计物理、调和分析、泛函分析、谱理论、计算数学等诸多数学分支的交叉渗透. 我们从统计物理的典型课题出发, 赤手空拳, 不懈探索. 为寻求数学工具, 访问了多个数学学科分支; 反过来我们也为这些学科分支作出了意想不到的贡献. 我们的实践再一次显示出数学的整体性, 显示出学科交叉渗透的威力.

致谢 本文根据以下 8 次讲座整理而成: 北京大学“数学及其应用”教育部重点实验室 2010 年会 (2010 年 12 月)、吉林大学 (2016 年 6 月)、北京师范大学第八届优秀大学生数学暑期夏令营 (2016 年 7 月)、四川大学 (2016 年 11 月)、山东大学 (威海) (2016 年 12 月)、台湾国立政治大学 (2017 年 3 月)、台湾国立中正大学 (2017 年 4 月) 和江苏师范大学

(2017 年 4 月). 作者衷心感谢文兰、张平文、王德辉、韩月才、李勇、许孝精、吕克宁、彭联刚、李娟、陈隆奇、黄郁芬和谢颖超等教授的热情款待和他们单位的资助.

参 考 文 献

- [1] 陈木法. 概率论的一些新进展(中国数学会 50 周年年会综合报告) [J]. 数学季刊, 1986, **1**(1): 104–117.
- [2] 陈木法. 随机系统的数学问题 [OL]. 1997. <http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf/files/SciPopul/3.pdf>.
- [3] Chen M F. *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems* [M]. 2nd ed. (1st ed., 1992) Singapore: World Scientific, 2004: Part IV.
- [4] Chen M F. *Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory* [M]. London: Springer. 2005: Chapter 9.
- [5] 陈木法. 谈谈概率论与其他学科的若干交叉 [J]. 数学进展, 2005, **34**(6): 661–672; 再版: 数学传播, 2013, **37**(4): 16–32.
- [6] Chen M F. Spectral gap and logarithmic Sobolev constant for continuous spin systems [J]. *Acta Math. Sin. Eng. Ser.*, 2008, **24**(5): 705–736.
- [7] Chen M F. Speed of stability for birth-death processes [J]. *Front. Math. China*, 2010, **5**(3): 379–515.
- [8] Chen M F. Practical criterion for uniqueness of Q -processes [J]. *Chinese J. Appl. Probab. Statist.*, 2015, **31**(2): 213–224.
- [9] Chen M F. Unified speed estimation of various stabilities [J]. *Chinese J. Appl. Probab. Statist.*, 2016, **32**(1): 1–22.
- [10] Chen M F. Efficient initials for computing maximal eigenpair [J]. *Front. Math. China*, 2016, **11**(6): 1379–1418.

Progress of Probability Theory

CHEN Mu-Fa

(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University; Laboratory of Mathematics
and Complex Systems (Beijing Normal University), Ministry of Education, Beijing, 100875, China)

Abstract: This is the fourth article on the same topic. The earlier ones are [1], [2], [5]. Here, a brief introduction to a number of landmark events in a decade, which indicates that the probability theory has been moving to mature, becomes a normal branch of mathematics. We introduce this relatively young mathematics disciplines of the growth bit. And then combined with personal experience, focusing on the cross-penetration and typical results of probability theory with statistical physics and other disciplines branch of mathematics in the past decade. This article is not subject review, but only hope that through one or two sides, showing the development and progress of probability theory.

Keywords: probability theory; statistical mechanics; core mathematics; spectral theory; eigenvalue computation

2010 Mathematics Subject Classification: 60xx; 60K35; 58C40